Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

Chapitre 1
1STMG.110 Modéliser la dépendance entre deux grandeurs à l'aide d'une fonction.
1STMG.111 Déterminer graphiquement des images ou des antécédents.
1STMG.112 Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$.
1STMG.113 Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) \leqslant k$, $f(x) \geqslant k$,etc.
1STMG.114 Déterminer graphiquement le signe d'une fonction.
1STMG.115 Déterminer graphiquement les variations d'une fonction.
1STMG.116 Reconnaître l'expression d'une fonction affine.
1STMG.117 Tracer la représentation graphique d'une fonction affine.
1STMG.118 Déterminer graphiquement l'équation réduite d'une droite.
1STMG.119 Déterminer le signe d'une fonction affine.

I. Définir une fonction

1. Vocabulaire

Définition

Une fonction est ....

$$x \longrightarrow \boxed{\text{Processus } f} \longrightarrow f(x)$$

- On note : $f\ :\ x \longmapsto f(x)$ (La fonction f qui à x associe $f(x)$) ;
- x est ....et $f(x)$ est ....de x par la fonction f ;
- Si y est l'image de x par la fonction f (c'est-à-dire si $y = f(x)$) alors on dit que x est ....de y par la fonction f ;
- L'ensemble de définition d'une fonction f, noté ....est ....
  Un réel dont l'image ne peut pas être calculée par f est appelée ....de f.

Exemple : Soit f la fonction qui à un nombre associe son carré.
L'image de 2 est .... ; 3 est un antécédent de 9 car ...., mais il y a également ....

Remarque :
Il est parfois possible de traduire le lien entre un nombre x et son image $f(x)$ par une expression algébrique.
Par exemple, pour la fonction précédente, on a pour tout nombre réel x, $f(x) = $.........

1STMG.110 **Exercice :** Dans un club de gym, deux formules sont proposées :

Formule A : abonnement mensuel de 18 € et 5 € par séance ;
Formule B : abonnement mensuel de 28 € et $3,75$ € par séance.

Soit x le nombre de séances mensuelles d'un abonné.

a. Exprimer, en fonction de x, $f(x)$ le prix payé avec la formule A, puis $g(x)$ le prix payé avec la formule B.

b. Quelle formule est la plus avantageuse lorsqu'un abonné choisit 6 séances mensuelles ?

c. Un abonné dispose de 118 €. Quelle formule peut-on lui conseiller ?

d. Déterminer le nombre minimal de séances mensuelles pour que la formule B soit la plus avantageuse.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

II. Représentation graphique

1. Définitions

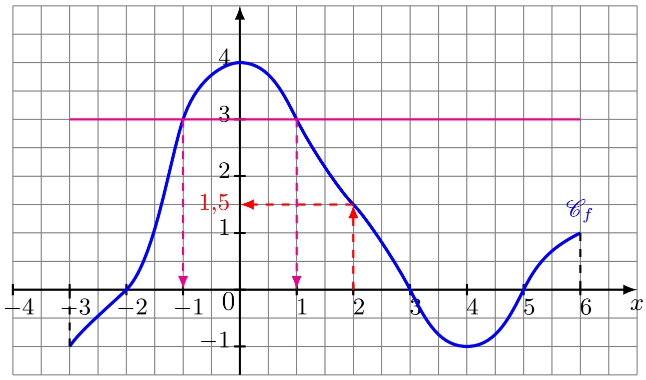
On se place dans un repère (O ; I ; J).

Définition

Soient f une fonction, $\mathscr{D}_f$ son ensemble de définition et x appartenant à $\mathscr{D}_f$.
La représentation graphique (ou courbe représentative) de la fonction f, notée $\mathscr{C}_f$, est :

....

On s'intéresse maintenant à la courbe représentative d'une fonction f :



1STMG.111

Méthode

Pour déterminer graphiquement l'image d'un nombre par une fonction, on se place sur l'axe des abscisses à la valeur demandée et on observe grâce à la courbe l'ordonnée correspondante.

Exemple : Sur le graphique ci-dessus, l'image de 2 par la fonction f est ....

1STMG.111

Méthode

Pour déterminer graphiquement les éventuels antécédents d'un nombre par une fonction, on se place sur l'axe des ordonnées et on observe grâce à la courbe les éventuels abscisses correspondantes.

Exemple :
Sur le graphique ci-dessus, les antécédents de 3 par la fonction f sont ....

III. Résolutions graphiques

1. Équations et inéquations

Les exemples de ce paragraphe s'appuieront sur ce graphique. La fonction f est définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 6]$.

1STMG.112

Méthode

Pour résoudre une équation du type $f(x) = k$, on trace la droite d'équation $y = k$ et on cherche les abscisses des points d'intersections avec la courbe $\mathscr{C}_f$.
Ces abscisses sont les solutions de l'équation.

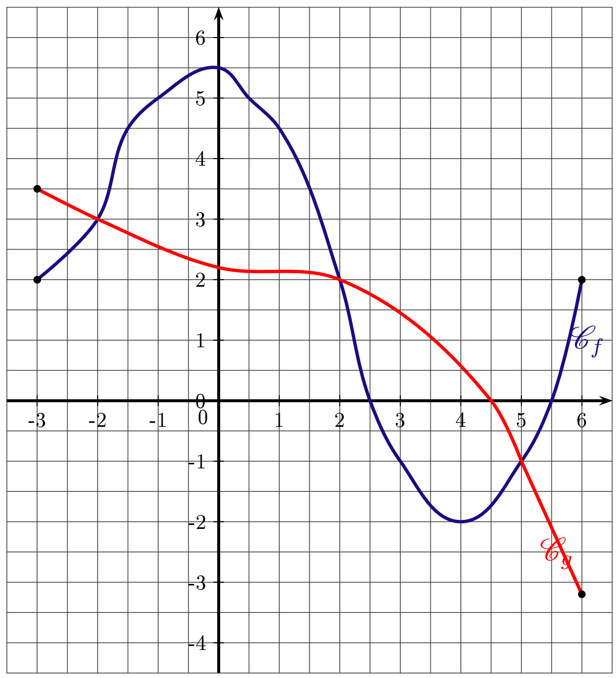
1STMG.113

Méthode

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) > k$ (ou $f(x) < k$), on trace la droite d'équation $y = k$ et on cherche les abscisses des points de la courbe situés au dessus (ou en dessous) de la droite.
Ces abscisses sont les solutions de l'inéquation.

Exercice : Résoudre graphiquement les équations et les inéquations suivantes :

- $f(x) = 5$; $\mathscr{S} = \dots\dots\dots$
- $f(x) = 0$; $\mathscr{S} = \dots\dots\dots$
- $f(x) = -1$; $\mathscr{S} = \dots\dots\dots$
- $f(x) = -2$; $\mathscr{S} = \dots\dots\dots$
- $f(x) \geqslant -1$; $\mathscr{S} = \dots\dots\dots$
- $f(x) < 2$; $\mathscr{S} = \dots\dots\dots$



2. Signe d'une fonction

Étudier le signe d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est positive et ceux sur lesquels elle est négative.
On résume l'ensemble de ces informations dans un tableau de signes.

Exemple : Résoudre graphiquement : $f(x) = 0$, $f(x) < 0$ puis $f(x) > 0$.

....

....

1STMG.114 Compléter le tableau de signes de la fonction f puis celui de la fonction g.

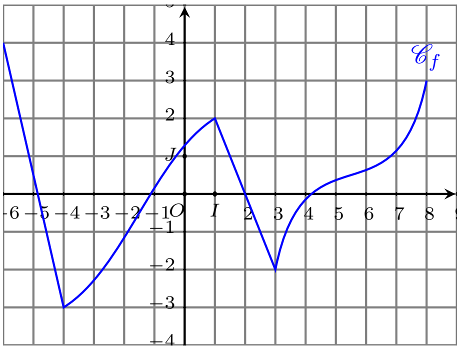
x	
Signe de $f(x)$	

x	
Signe de $g(x)$	

3. Variations d'une fonction

Étudier les variations d'une fonction, c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est croissante, ceux sur lesquels elle est décroissante ou ceux sur lesquels elle est constante.
On résume l'ensemble de ces informations dans un tableau de variations.

1STMG.115 **Exercice :**
Dresser le tableau de variations de la fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



x	
$f(x)$	

IV. Les fonctions affines

1. Définition

Définition

Soit f une fonction définie **sur** $\mathbb{R}$.
S'il existe deux nombres réels m et p tels que **pour tout** nombre réel x on ait :

$$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

alors on dit que f est une **fonction affine**.

1STMG.116 **Exercice :** Expliquer pourquoi chacune des fonctions suivantes est affine :

1. $f(x) = 5x - 6$.
....
....

2. $f(x) = 3 - 2x$.
....
....

3. $f(x) = 0,9x - 1$.
....
....

Remarques : Lorsque $p = 0$, on parle de fonction linéaire et lorsque $m = 0$, on parle de fonction constante.

2. Représentation graphique.

Propriété

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Cette droite a pour équation :

....

Définition

- Le nombre m est appelé .... de la droite d.
- Le nombre p est appelé .... de la droite d.

1STMG.117

Méthodes

Deux méthodes sont possibles pour tracer la représentation graphique d'une fonction affine :
- On place deux points distincts dont on déterminera les coordonnées ;
- On utilise l'ordonnée à l'origine puis le coefficient directeur de la droite.

Exercice :
En utilisant la méthode de votre choix, tracez les représentations graphiques des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

1. $f_1(x) = 2x - 3$

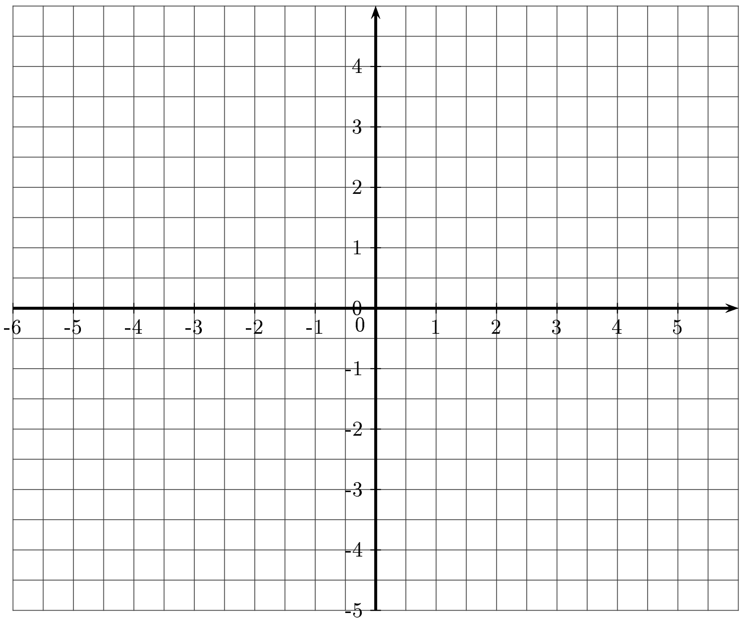
2. $f_2(x) = -3x + 1$

3. $f_3(x) = -4$

4. $f_4(x) = -\dfrac{1}{3}x - 1$

5. $f_5(x) = 3x + 2$

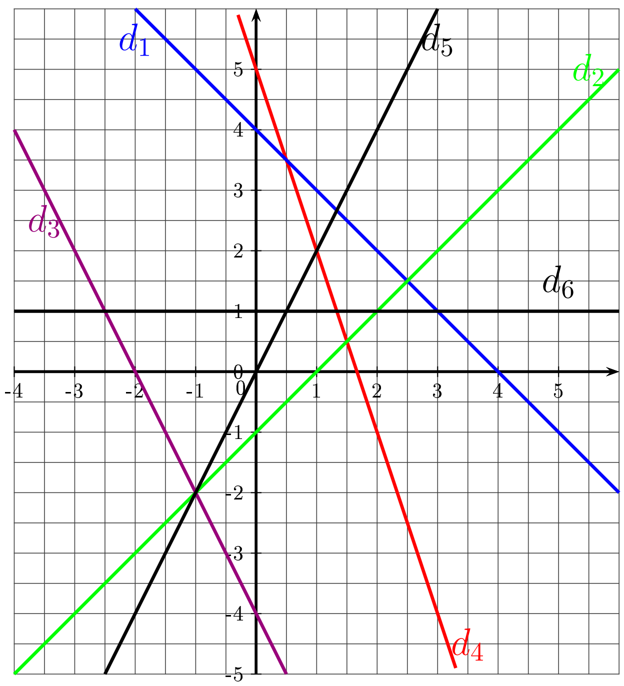
6. $f_6(x) = \dfrac{3}{2}x$



Cas particuliers :

- Si $p = 0$, alors la droite ....
- Si $m = 0$, alors la droite ....

1STMG.118 **Exercice :** Déterminer les équations des droites représentées ci-dessous.



- ....
- ....
- ....
- ....
- ....
- ....

Remarques

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- Si $m > 0$ alors ....
- Si $m < 0$ alors ....
- Si $m = 0$ alors ....

V. Signe d'une fonction affine

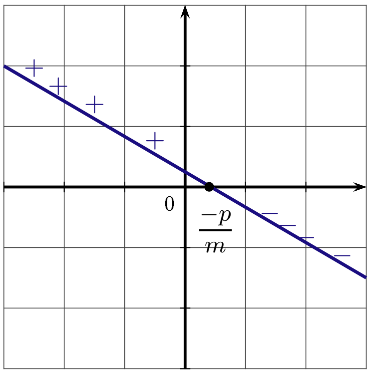
Méthode

Pour étudier le signe d'une fonction affine f, on résout $f(x) = 0$, c'est-à-dire $mx + p = 0$.

La solution de cette équation est ....

On place cette valeur **dans le tableau de signe** en indiquant que la fonction vaut alors 0.
Ensuite, on utilise les variations de cette fonction.

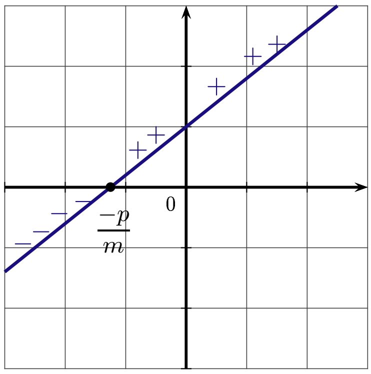
Si $m < 0$, la fonction est **décroissante** :



Les valeurs de la fonction évoluent donc du **positif** au **négatif**.

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	

Si $m > 0$, la fonction est **croissante** :



Les valeurs de la fonction évoluent donc du **négatif** au **positif**.

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Signe de $f(x)$	

1STMG.119 **Exercice :** Dresser le tableau de signes des fonctions affines suivantes :

1. $f_1(x) = 2x - 3$; **2.** $f_2(x) = -\dfrac{1}{3}x + 1$; **3.** $f_3(x) = -3x - 1$; **4.** $f_4(x) = 3x + 2$

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
$f_1(x)$	

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
$f_2(x)$	

....

....

....

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
$f_3(x)$	

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
$f_4(x)$	

....

....

....