Chapitre 3

Les suites

Chapitre 3
1STMG.120 Calculer les termes d'une suite (explicite ou par récurrence).
1STMG.121 Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
1STMG.122 Programmer le calcul du terme d'un rang donné.
1STMG.123 Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une suite.
1STMG.124 Étudier les variations d'une suite.
1STMG.125 Reconnaître et utiliser une suite arithmétique.
1STMG.126 Reconnaître et utiliser une suite géométrique.

I. Généralités sur les suites

Définition

Une suite est ....

$$n \longrightarrow \boxed{\quad u \quad} \longrightarrow u(n)$$

L'image de n par u se note $u(n)$ ou encore u_n.
On dit que $u(n)$ est le terme général de la suite, le terme de rang n ou le terme d'indice n.
La suite est notée u ou encore (u_n).

Remarques :
- L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
- Une suite est une liste de nombres qui se poursuit : $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$, ...
- $u(1,5)$, $u(-2)$ n'existent pas ! En revanche $u(0) = -2,5$ est tout à fait possible.
- $u(n+1)$ est le terme qui suit $u(n)$.

1. Modes de génération d'une suite

Une suite peut être définie de deux manières différentes :

Définition

Une suite u est définie de manière explicite lorsque l'on peut exprimer le terme général $u(n)$ en fonction de son indice n.

Remarque : On peut calculer directement n'importe quel terme $u(n)$ de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

1STMG.120 **Exemple :** On considère la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u(n) = 2n + 1$$

Calculer les termes $u(0)$, $u(1)$, $u(12)$ et $u(100)$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Définition

Une suite u est définie par récurrence quand elle est définie par la donnée :
- de son terme initial, généralement $u(0)$;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.
  Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Remarque : Pour ce type de suite, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme.
En effet, pour déterminer $u(4)$, on a besoin de $u(3)$ et pour déterminer $u(3)$, on a besoin de $u(2)$, et ainsi de suite de proche en proche.

1STMG.120 **Exemple :** On considère la suite u de terme initial $u(0) = -3$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u(n+1) = 2u(n) - 5$$

Calculer les termes $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$ et $u(4)$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

1STMG.121 **Exemple :**
Chaque année, un magazine perd la moitié de ses abonnés mais en gagne 150 nouveaux.
En 2019, ce magazine compte 120 000 abonnés. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u(n)$ le nombre d'abonnés en $2019 + n$.

a. Donner $u(0)$.

b. Calculer $u(1)$ puis interpréter cette valeur.

c. Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.

d. En utilisant la calculatrice, déterminer le nombre d'abonnés en 2024.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

1STMG.122 **Exemple :** On considère l'algorithme écrit en langage Python :

```python
from math import*
def u(n):
    u=2
    for i in range (1,n+1):
        u=3u-2
    return u
```

a. Appliquer cet algorithme avec $n = 3$.

b. Définir la suite u associée à cet algorithme.

. . . .

. . . .

. . . .

2. Représentation graphique

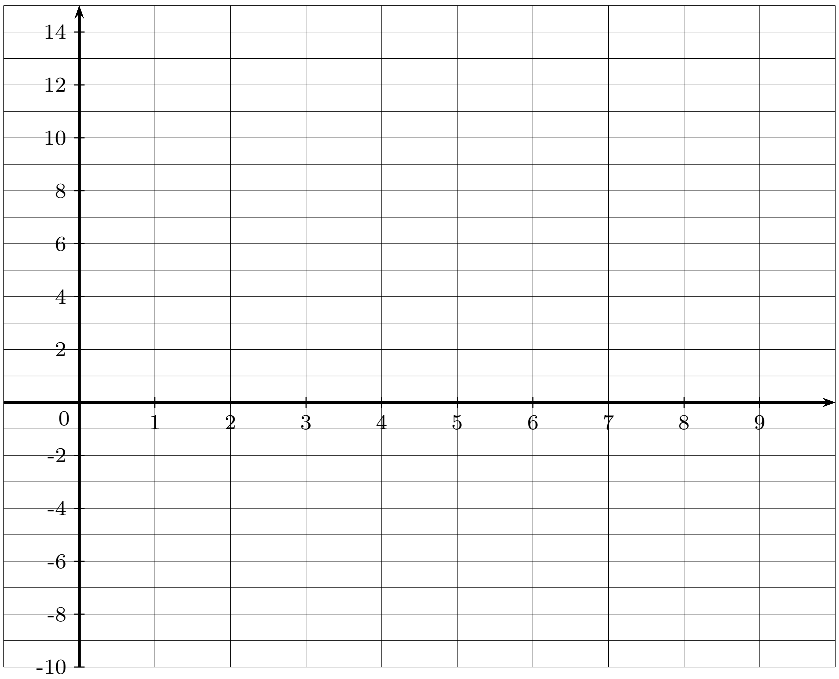
Définition

Dans un repère (O ; $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), la représentation graphique d'une suite u est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;\,u(n))$.

Remarque : Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.

1STMG.123 **Exemple :** Représenter dans le repère ci-dessous la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u(n) = -n^2 + 7n + 1$$



II. Sens de variation d'une suite

Définition

- Une suite u est croissante si pour tout entier naturel n : $u(n) \leqslant u(n+1)$;
- Une suite u est décroissante si pour tout entier naturel n : $u(n) \geqslant u(n+1)$;
- Une suite u est constante si pour tout entier naturel n : $u(n+1) = u(n)$;
- Une suite u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque : Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes.
Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Méthode

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite u, on étudie le signe de la différence $u(n+1) - u(n)$.

1STMG.124 **Exercice :** Soit v la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v(n) = n^2 + 1$.
Déterminer l'expression de $v(n+1) - v(n)$. En déduire le sens de variation de la suite v.

....

....

....

....

....

....

III. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Définition

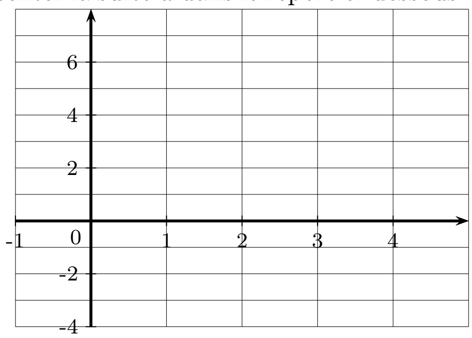
Une suite est dite **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre réel constant r, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: . . . .

1STMG.125 **Exemple :** Soit u la suite arithmétique de terme initial $u(0) = -3$ et de raison $r = 2$.
Calculer les termes $u(1)$, $u(2)$, $u(3)$, $u(4)$ et $u(5)$ puis représenter la suite u dans le repère ci-dessous.

. . . .

. . . .

. . . .



Propriété

Une suite est arithmétique si et seulement sa représentation graphique est un nuage de points alignés.
On parle alors de croissance linéaire.

Méthode

Pour prouver qu'une suite u est arithmétique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u(n+1) - u(n)$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

1STMG.125 **Exemple :** Montrer que la suite u définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $u(n) = 3n - 2$ est arithmétique.

. . . .

. . . .

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$, u est croissante ; si $r < 0$, u est décroissante ; si $r = 0$, u est constante.

2. Suites géométriques

Définition

Une suite est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un nombre réel constant q, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: . . . .

1STMG.126 **Exemple :** Soit v la suite géométrique de terme initial $v(0) = 1$ et de raison $q = 2$.
Calculer les termes $v(1)$, $v(2)$ et $v(3)$.

. . . .

. . . .

Méthode

Pour prouver qu'une suite v est géométrique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quotient $\dfrac{v(n+1)}{v(n)}$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

1STMG.126 **Exemple :** Montrer que la suite v définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $v(n) = 2 \times 3^n$ est géométrique.

. . . .

. . . .

Propriété

Soit v une suite géométrique de raison q telle que $v(0) > 0$:

- Si $q > 1$, v est croissante ; si $0 < q < 1$, v est décroissante ; si $q = 1$, v est constante.
- Le nuage de points représentant la suite v suit une croissance exponentielle.