Chapitre 5

Les fonctions polynômes de degré 2

Chapitre 5
1STMG.130 Reconnaître une fonction polynôme du second degré.
1STMG.131 Vérifier qu'une valeur est la racine d'un polynôme du second degré.
1STMG.132 Associer une fonction à une parabole d'équation $y = ax^2 + b$ ou $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
1STMG.133 Résoudre une équation de la forme $x^2 = c$.
1STMG.134 Caractériser une fonction polynôme du second degré de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
1STMG.135 Factoriser une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
1STMG.136 Déterminer le signe de la fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

I. Introduction aux fonctions polynômes du second degré

1. Définition

Définition

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

1STMG.130 **Exercice :** Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré.

$$f(x) = -3x^2 + 2x - 1 \quad ; \quad g(x) = 2x^2 - 4 \quad ; \quad h(x) = 4(x-1)(x+2)$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. Racines d'un polynôme du second degré

Définition

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.
Autrement dit, les racines de f sont les antécédents de 0 par la fonction f.

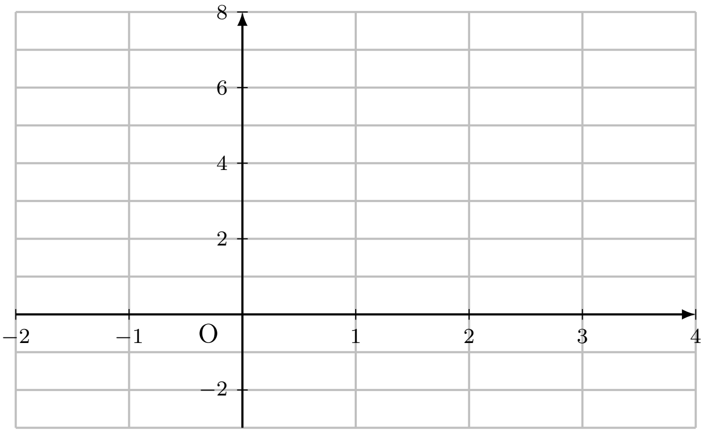
1STMG.131 **Exercice :** Vérifier que le réel 2 est une racine de la fonction $f : x \longmapsto -2x^2 + 5x - 2$.

. . . .

Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction polynôme du second degré est représentée par une parabole $\mathscr{P}$.
La parabole $\mathscr{P}$ admet un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées (Oy).
Le point d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ et de l'axe (Oy) est appelé **sommet** de la parabole. Il est noté S.

Exemple : Dans le repère ci-dessous, tracer la parabole représentant la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 1$, son axe de symétrie ainsi que son sommet.



II. Fonctions polynômes de degré 2 de la forme $x \longmapsto ax^2 + b$

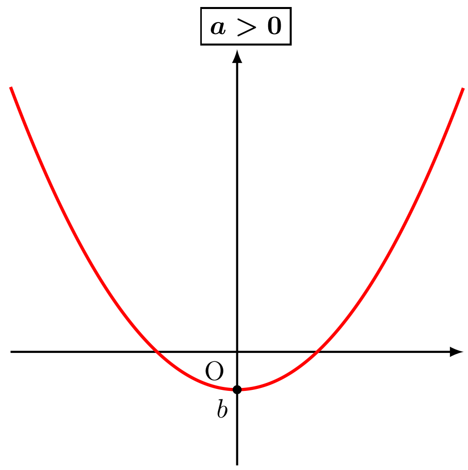
1. Symétrie et variations

Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction du type $x \longmapsto ax^2 + b$ est représentée par une parabole qui admet pour sommet le point $\mathrm{S}(0\,;\,b)$ et pour axe de symétrie l'axe des ordonnées (Oy).

Remarque : Lorsque $b = 0$, la parabole représente une fonction du type $x \longmapsto ax^2$ et admet comme sommet l'origine O du repère.

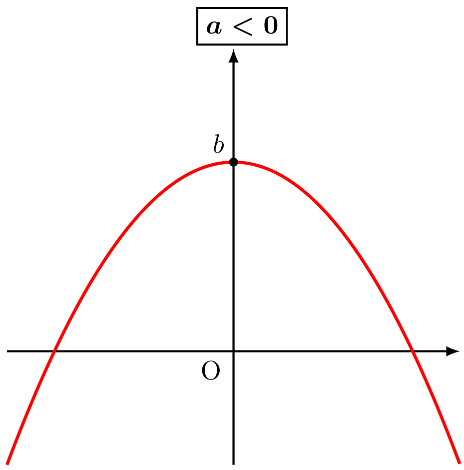
Deux orientations de la parabole sont possibles suivant le signe du réel a :



Les branches de $\mathscr{P}$ sont orientées vers le haut.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	b	$\nearrow$

La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.



Les branches de $\mathscr{P}$ sont orientées vers le bas.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	b	$\searrow$

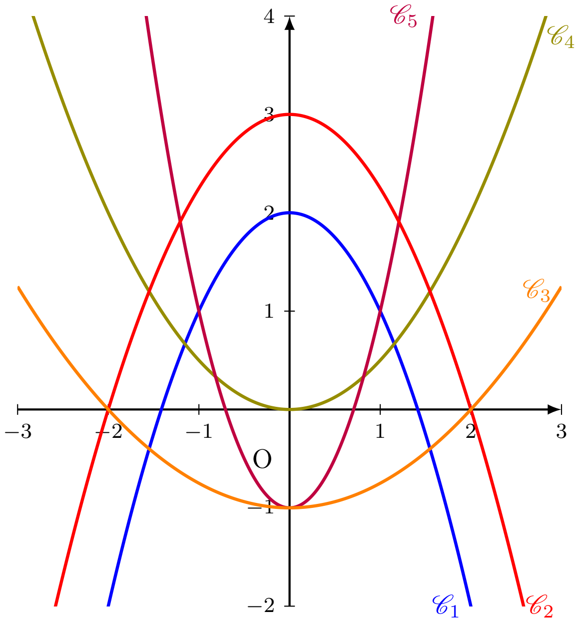
La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

1STMG.132 **Exercice :**

On a représenté, sur le graphique ci-dessous, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

$$f(x) = 0,5x^2 \quad ; \quad g(x) = -x^2 + 2 \quad ; \quad h(x) = 0,25x^2 - 1 \quad ; \quad k(x) = -0,75x^2 + 3 \quad ; \quad p(x) = 2x^2 - 1$$

Associez chacune de ces fonctions aux courbes tracées dans le repère ci-dessous.



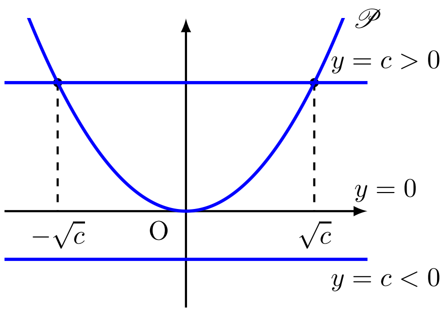
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Équation de la forme $x^2 = c$

Méthode

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $x^2 = c$, on prend en compte le signe du réel c :

- si $c < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle ;
- si $c = 0$, l'équation admet une unique solution : $x = 0$;
- si $c > 0$, l'équation admet deux solutions : $x = -\sqrt{c}$ et $x = \sqrt{c}$.



Remarque : Les solutions de l'équation $x^2 = c$ sont représentées graphiquement par les abscisses des points d'intersection de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et de la droite horizontale d'équation $y = c$.

1STMG.133 **Exercice :** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $-2x^2 = -4$; **b.** $3x^2 + 5 = 2x^2 + 5$; **c.** $5x^2 + 4 = 3x^2 - 2$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

III. Fcts polynômes de degré 2 de la forme $x \longmapsto a(x-x_1)(x-x_2)$

1. Symétrie et variations

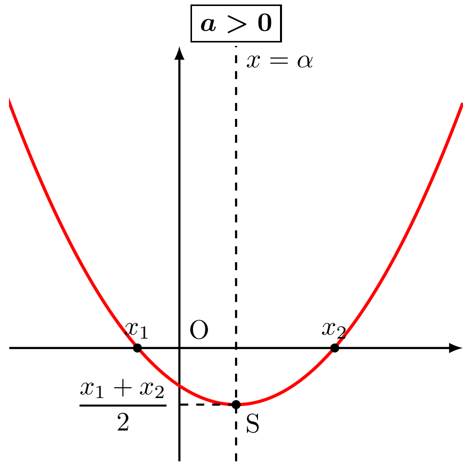
Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction du type $x \longmapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ est représentée par une parabole qui admet pour sommet le point S d'abscisse $\alpha = \dfrac{x_1+x_2}{2}$ et pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = \alpha$.

Remarques :

- Si $x_1 \neq x_2$, la parabole d'équation $y = a(x-x_1)(x-x_2)$ coupe l'axe des abscisses (Ox) en deux points distincts d'abscisses x_1 et x_2 ;
- Si $x_1 = x_2$, la parabole d'équation $y = a(x-x_1)(x-x_2) = a(x-x_1)^2$ coupe l'axe des abscisses (Ox) en un seul point d'abscisse x_1 ;
- Le nombre α est la moyenne des racines x_1 et x_2.

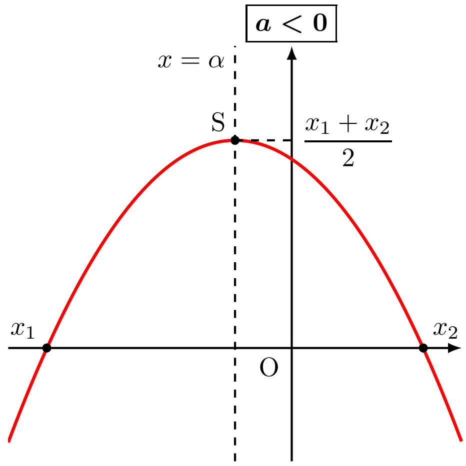
Deux orientations de la parabole sont possibles suivant le signe du réel a :



Les branches de $\mathscr{P}$ sont orientées vers le haut.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	$f(\alpha)$	↗

La fonction f est décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.



Les branches de $\mathscr{P}$ sont orientées vers le bas.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↗	$f(\alpha)$	↘

La fonction f est croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.

1STMG.134 **Exercice :**
On considère la fonction $f : x \longmapsto 2(x+6)(x-4)$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer les racines de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathscr{P}$ ainsi que son axe de symétrie.
3. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

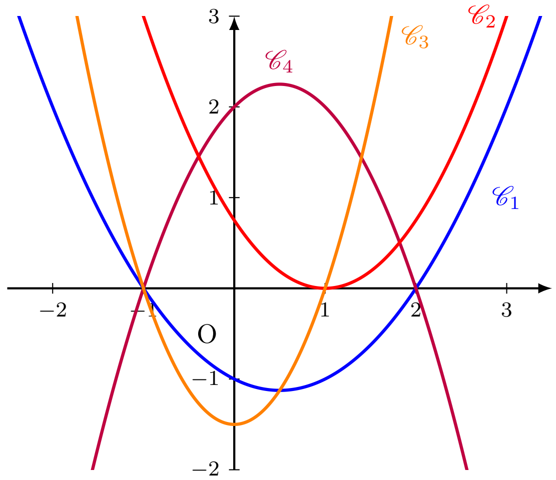
....
....
....
....
....
....
....

1STMG.132 **Exercice :**

On a représenté, sur le graphique ci-dessous, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

$$f(x) = 1,5(x-1)(x+1) \quad ; \quad g(x) = 0,75(x-1)^2 \quad ; \quad h(x) = 0,5(x-2)(x+1) \quad ; \quad k(x) = -(x-2)(x+1)$$

Associez chacune de ces fonctions aux courbes tracées dans le repère ci-dessous.



1STMG.135 **Exercice :**

a. Factoriser l'expression $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$ sachant que f s'annule en $0,5$ et en 3.

b. Factoriser l'expression $g(x) = 3x^2 - 2x - 8$ sachant que 2 est une racine de g.

2. Signe d'une fonction polynôme du second degré

Méthode

Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$, on étudie le signe de chacun des trois facteurs et on dresse un tableau de signes.

1STMG.136 **Exercice :** On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = -2(x-3)(x+4)$.

Déterminer ses racines puis dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice bilan :

Un artisan fabrique des confitures qu'il vend par carton de dix pots.
Le coût en euros de fabrication de x cartons de dix pots est $f(x) = 0,25x^2 + 500$, pour x compris 0 et 160.

1. **a.** Déterminer le coût de fabrication de 60 cartons de dix pots de confiture.
   b. Pour combien de cartons le coût de fabrication est de 2 525 € ?
2. Chaque carton de confitures est vendu 30 €.
   Exprimer la recette $R(x)$ en fonction de x.
3. Soit B la fonction bénéfice définie sur l'intervalle $[0\,;\,160]$.
   a. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;\,160]$:
   $$B(x) = -0,25x^2 + 30x - 500$$
   b. Montrer que, pour tout $x \in [0\,;\,160]$: $B(x) = -0,25(x - 100)(x - 20)$.
4. Quel nombre de cartons doit vendre cet artisan si il veut réaliser un bénéfice positif ?
5. Quel est le nombre de cartons à vendre pour que son bénéfice soit maximal ? Calculer alors ce bénéfice.