Chapitre 8

Les fonctions polynômes de degré 3

Chapitre 8
1STMG.150 Reconnaître une fonction polynôme du troisième degré.
1STMG.151 Vérifier qu'une valeur est la racine d'un polynôme du troisième degré.
1STMG.152 Associer une fonction à une courbe d'équation $y = ax^3 + b$ ou $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
1STMG.153 Résoudre une équation de la forme $x^3 = c$.
1STMG.154 Déterminer le signe d'une fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

I. Introduction aux fonctions polynômes du troisième degré

1. Définition

Définition

On appelle fonction polynôme du troisième degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où les coefficients a, b, c et d sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

1STMG.150 **Exercice :** Montrer que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du troisième degré.

$$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 2x + 1 \quad ; \quad g(x) = 4x^3 - 4x \quad ; \quad h(x) = 2(x-1)(x+2)(x-3)$$

....

....

....

....

....

2. Racines d'un polynôme du troisième degré

Définition

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$.
On appelle racine de f toute solution de l'équation $f(x) = 0$.
Autrement dit, les racines de f sont les antécédents de 0 par la fonction f.

1STMG.151 **Exercice :** Vérifier que le réel (-1) est une racine de la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 2x + 1$.

....

....

....

II. Fonctions polynômes de degré 3 de la forme $x \longmapsto ax^3 + b$

1. Représentation et variations

Propriété

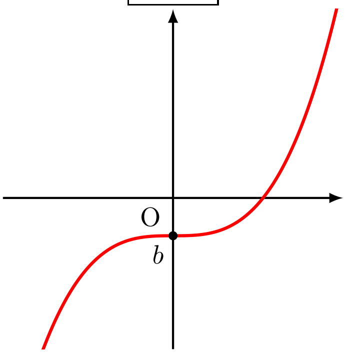
Dans un repère orthogonal, toute fonction du type $x \longmapsto ax^3$ est représentée par une courbe qui passe par l'origine O du repère et qui est symétrique par rapport à O.

Propriété

Les courbes représentatives des fonctions du type $x \longmapsto ax^3 + b$ sont similaires à celles de la forme $x \longmapsto ax^3$. Elles ne sont pas symétriques par rapport à O mais sont décalées vers le haut ou le bas, selon le signe de b.

Deux orientations de la courbe d'équation $y = ax^3 + b$ sont possibles suivant le signe du réel a :

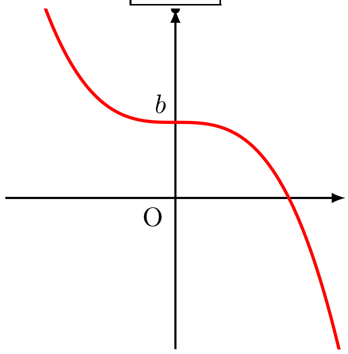
$\boxed{a > 0}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↗	b	↗

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{a < 0}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	b	↘

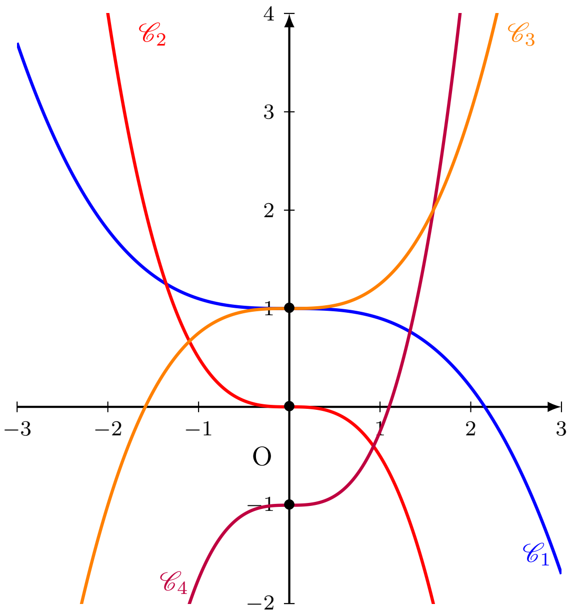
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

1STMG.152 **Exercice :**

On a représenté, sur le graphique ci-dessous, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 \quad ; \quad g(x) = -0.1x^3 + 1 \quad ; \quad h(x) = \frac{1}{4}x^3 - 1 \quad ; \quad k(x) = 2x^3 + 1$$

Associez chacune de ces fonctions aux courbes tracées dans le repère ci-dessous.

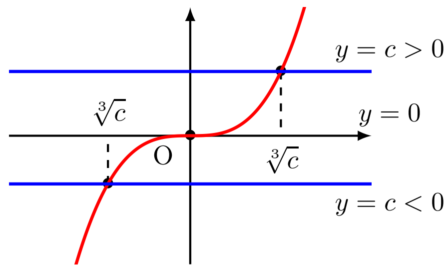


2. Équation de la forme $x^3 = c$

Méthode

Toute équation de la forme $x^3 = c$ admet qu'une seule solution notée :

$$x = \sqrt[3]{c}$$



Remarques :

- Les solutions de l'équation $x^3 = c$ sont représentées graphiquement par les abscisses des points d'intersection de la courbe d'équation $y = x^3$ et de la droite horizontale d'équation $y = c$;
- Si $c = 0$ alors $x = \sqrt[3]{0} = 0$;
- le signe de x est le même que celui de c.

1STMG.153 **Exercice :** Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (On arrondira au millième si nécessaire)

a. $-3x^3 = 24$; **b.** $3x^3 + 5 = 2x^3 + 5$; **c.** $5x^3 - 4 = 3x^3 + 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

III. Fonctions de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

1. Représentation graphique

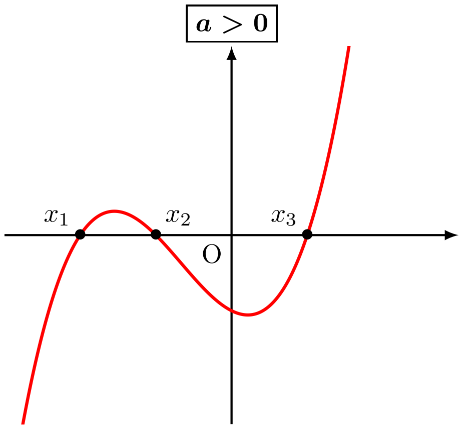
définition

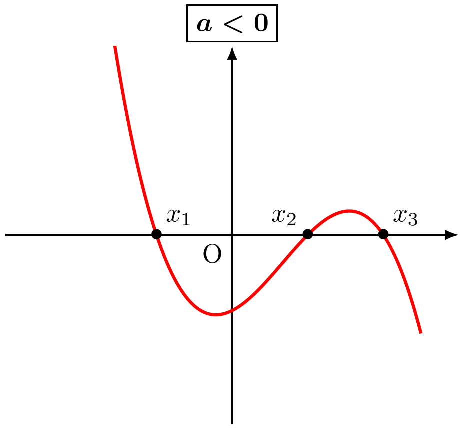
Toute fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 3. Elle s'annule en x_1, x_2 et x_3.

Remarque :

- Si $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, la courbe d'équation $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ coupe l'axe des abscisses (Ox) en trois points distincts d'abscisses x_1, x_2 et x_3 ;
- x_1, x_2 et x_3 sont les racines de la fonction polynôme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Deux allures de la courbe sont possibles suivant le signe du réel a :



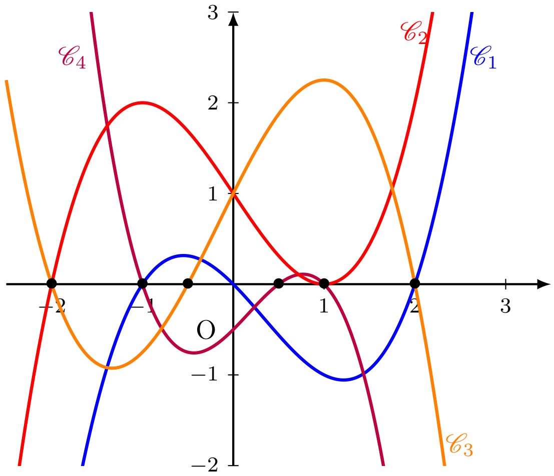


1STMG.152 **Exercice :**

On a représenté, sur le graphique ci-dessous, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x+2)(x-1)^2; g(x)=-0,5(x+0.5)(x+2)(x-2); h(x)=-(x-1)(x+1)(x-0.5); k(x)=\dfrac{1}{2}x(x-2)(x+1)$

Associez chacune de ces fonctions aux courbes tracées dans le repère ci-dessous.



2. Signe d'une fonction polynôme du troisième degré

Méthode

Pour étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré de la forme $x \longmapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, on étudie le signe de chacun des trois facteurs et on dresse un tableau de signes.

1STMG.154 **Exercice :** On considère la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x)=-2(x-3)(x+4)(x+1)$.

Déterminer ses racines puis dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.