

MATHEMATIQUES

E3C : dérivation (2), corrigé

1. Le bénéfice est donné par $b(x) = r(x) - C(x)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} B(x) &= 108x - (x^3 - 30x^2 + 300x) \\ &= 108x - x^3 + 30x^2 - 300x \\ &= -x^3 + 30x^2 - 192x \end{aligned}$$

N'oubliez pas !

N'oubliez pas les parenthèses autour de $x^3 - 30x^2 + 300x$. Quand les parenthèses sont précédées d'un signe $-$, on les enlève en changeant les signes (on distribue un coefficient -1 sur chacun des termes, ce qui a pour effet de changer les signes).

2. B est une fonction polynôme du troisième degré. Sa dérivée est donnée par :

$$\begin{aligned} B'(x) &= -3x^2 + 30 \times 2x - 192 \\ &= -3x^2 + 60x - 192 \end{aligned}$$

A savoir

- Si $u(x) = x^3$, alors $u'(x) = 3x^2$,
- Si $v(x) = x^2$, alors $v'(x) = 2x$.
- Si $w(x) = x$, alors $w'(x) = 1$

Pour vérifier qu'il s'agit bien de l'expression donnée, on développe :

$$\begin{aligned} 3(4-x)(x-16) &= (12-3x)(x-16) \\ &= 12x - 192 - 3x^2 + 48x \\ &= -3x^2 + 60x - 192 \\ &= B'(x) \end{aligned}$$

On a donc bien pour tout réel x de $[0 ; 20]$:

$$B'(x) = 3(4-x)(x-16)$$

3. La valeur qui annule $4-x$ est 4 et celle qui annule $x-16$ est 16. On en déduit le tableau de variations de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 20]$ en utilisant la règle pour les signes de fonctions affines :

x	0	4	8	16	10	$+\infty$
3	+		+		+	
$4-x$	+	0	-		-	
$x-16$	-		-	0	+	
$B'(x)$	-	0	+	0	-	
$B(x)$	0	↘	-352	↗	-128	↗
				512	↘	80
						↘
						160

Conseil

Les nombres 0, -352 , 512 et 160 sont les images des nombres 0, 4, 16 et 20. Utilisez votre calculatrice pour les calculer.

4. Pour obtenir un bénéfice maximal l'entreprise doit fabriquer et vendre 16 tonnes. Le bénéfice sera de 512 milliers d'euros.

Remarque

C'est le tableau de variations qui donne cette information. Attention, les images sont en milliers d'euros.

5. On a $B(8) = -8^3 + 30 \times 8^2 - 192 \times 8 = -128$ et $B(10) = -10^3 + 30 \times 10^2 - 192 \times 10 = 80$.
On en déduit que le directeur commercial se trompe et que le chef de production a raison.