FONCTIONS

8

Les fcts polynômes de degré 3

Les savoir-faire du chapitre

- **1STMG.150** Reconnaître une fonction polynôme du troisième degré.
- **1STMG.151** Vérifier qu'une valeur est la racine d'un polynôme du troisième degré.
- **1STMG.152** Associer une fonction à une courbe d'équation $y = ax^3 + b$ ou $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
- **1STMG.153** Résoudre une équation de la forme $x^3 = c$.
- **1STMG.154** Déterminer le signe d'une fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Activité d'introduction

Une usine agricole produit chaque mois entre 0 et 50 machines agricoles. On a modélisé le bénéfice de cette entreprise, exprimé en milliers d'euros, par la fonction f définie pour tout $x \in [0\,;50]$ par :

$$f(x) = x^3 - 95x^2 + 2\,450x - 10\,000$$

1) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;50]$, $f(x) = (x-5)(x-40)(x-50)$.
2) Étudier le signe de $f(x)$.
3) En déduire le nombre de machines agricoles que l'entreprise doit produire pour réaliser des profits.

S'entraîner

Généralités sur les fonctions

1 Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du troisième degré.

1) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$

2) $g(x) = -3(x+7)(x-2)(x-1)$

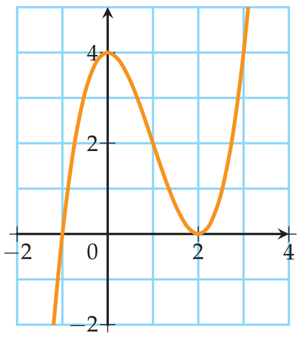
3) $h(x) = 2(x-1)(x-1)^2$

2 On considère la fonction polynôme de degré 3 définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

1) **a)** Montrer que 2 et (-1) sont deux racines de f.

b) Que peut-on en déduire graphiquement ?

2) On a tracé ci-dessous la courbe représentant f.

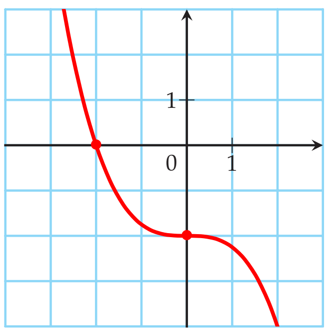


a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

$x \longmapsto ax^3 + b$

3 On a représenté ci-dessous une fonction polynôme de degré 3 dont l'expression est : $f(x) = ax^3 + b$



1) Déterminer graphiquement la valeur de b

2) Déterminer, par lecture graphique, le réel $f(-2)$.

3) En déduire l'expression de la fonction f.

4 Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1) $f(x) = -2x^3 + 1$ **2)** $g(x) = 5x^3 - 4$

5 Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$:

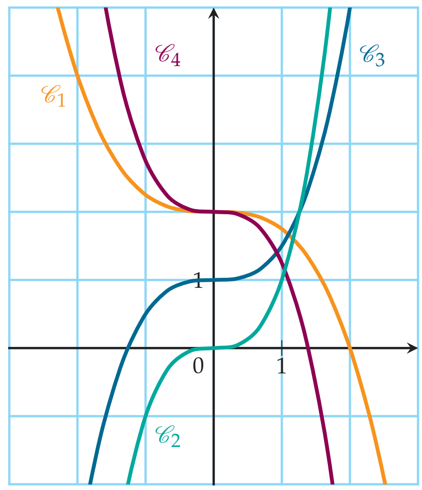
1) $f(x) = 0,5x^3 + 1$

2) $g(x) = -0,75x^3 + 2$

3) $h(x) = x^3$

4) $k(x) = -0,25x^3 + 2$

Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



Résolution d'équations

Pour les exercices suivants, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près des solutions.

6

1) $x^3 = 1\,000$ **2)** $x^3 = 64$ **3)** $2x^3 + 11 = 5$

7

1) $x^3 - 4 = 0$ **2)** $2x^3 = x^3 + 1$ **3)** $x^3 - 4x^2 = 0$

8

1) $x^3 + 3x^2 = 3x^2 - 1$ **2)** $3x^3 + 3 = 2x^3 + 4$

9

1) $(x^2 - 4)(4 - 3x) = 0$ **2)** $(2x+1)(4x^2 - 4) = 0$

$x \longmapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

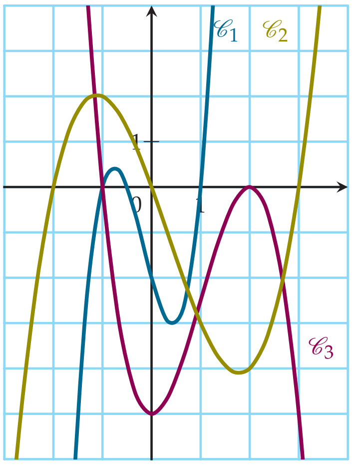
10 Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$:

1) $f(x) = -\dfrac{5}{4}(x+1)(x-2)^2$;

2) $g(x) = 4(x+1)(x-1)(x+0,5)$;

3) $h(x) = \dfrac{1}{2}x(x-3)(x+2)$.

Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -3(x-8)(x+5)(x-3)$$

1) Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

12 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $2(x-1)(x+4)(x-3) \geqslant 0$

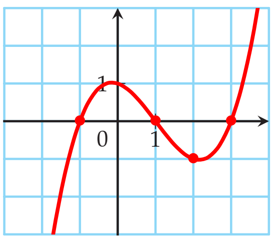
2) $-(x+1)^2(x+2) \leqslant 0$

13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-2x(x+5)(x-2) > 0$ **2)** $(x-1)^3 \leqslant 0$

14 On a représenté ci-dessous une fonction polynôme du second degré dont l'expression est :

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$



1) Quelles sont les valeurs de x_1, x_2 et x_3 ?

2) Déterminer la valeur de a sachant que $f(2) = -3$

E3C

15

L'objectif de l'exercice est de trouver le maximum de la fonction f définie sur l'intervalle $[200 ; 400]$ par

$$f(x) = -0,01x^3 + 4x^2$$

1) On admet que la fonction f est dérivable sur $[200 ; 400]$ et on note f' sa dérivée.
Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = x(-0,03x + 8)$.

2) Donner le tableau de signe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[200 ; 400]$.

3) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[200 ; 400]$.

4) Quel est le maximum de cette fonction sur l'intervalle $[200 ; 400]$? En quelle valeur est-il atteint ?

5) Pour vérifier la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur l'intervalle $[200 ; 400]$, on utilise l'algorithme de balayage ci-dessous, écrit en langage Python :

```python
def balayage(pas):
    x=200
    while x*(-0.03*x+8)>0:
        x=x+pas
    return (x-pas , x)
```

Que renvoie l'instruction balayage(1) ?

16 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8$$

1) a) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

b) Vérifier que pour tout $x \in [-5 ; 5]$, $f'(x) = 3(x-4)(x+2)$.

2) a) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

b) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

3) Déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $[-5 ; 5]$ et en préciser la valeur.