

1 Variable aléatoire

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i (avec $1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X , on associe la probabilité p_i de l'évènement ($X = x_i$), on dit que l'on définit une loi de probabilité.

Méthode : Déterminer une loi de probabilité

On lance un dé à 6 faces.

Si le résultat est pair, on gagne 2 €.

Si le résultat est 1, on gagne 3 €.

Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.

Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le gain à ce jeu.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Espérance, variance et écart-type

Définition

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n avec des probabilités respectives p_1, \dots, p_n .

1) L'espérance mathématique de X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

2) La variance de X est le nombre noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2$$

3) L'écart-type de X est le nombre, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque

- L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i .
- Le mot « espérance » vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Un jeu est dit équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.
- Une autre formule de la variance est $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Méthode : Déterminer une espérance, une variance et un écart type

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

Si on tire un coeur, on gagne 2 €.

Si on tire un roi, on gagne 5€.

Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

X est la variable aléatoire donnant le gain du jeu. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .


