Parcours d'exercices

Variables aléatoires

9

PROBABILITES

Exercice 1

X est une variable aléatoire. Déterminer les événements contraires de :

1) $(X > 5)$;
2) X est supérieur ou égal à 2 ;
3) $(X \leqslant 3)$;
4) X est inférieur ou égal à 4.

Exercice 2

Le nombre de clients passant à la caisse d'un supermarché en 10 min est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,15	0,3	0,25	0,2	0,05	0,05

1) Indiquer $P(X = 3)$.
2) Que représente l'événement $\{X \leqslant 3\}$?
3) Donner la notation de l'événement : « au moins deux clients sont passés à la caisse en 10 minutes »
4) Donner la notation de l'événement : « au plus quatre clients sont passés à la caisse en 10 minutes »
5) Donner les valeurs de $P(X > 3)$, $P(X \geqslant 1)$ et $P(X \leqslant 2)$.

Exercice 3

Un questionnaire à choix multiple (QCM) est composé de 5 questions. Pour chacune de ces 5 questions, il y a quatre réponses possibles et une seule est correcte. Nabolos coche au hasard une réponse pour chacune des 5 questions.

Le barème est le suivant : un point est donné pour chaque bonne réponse et 0,5 point est enlevé pour chaque réponse fausse. Si le résultat est négatif, la note est ramenée à 0.

Quelle variable aléatoire X permet de modéliser cette situation ? Quelles sont les valeurs prises par X ?

Exercice 4

On lance un dé. On gagne 2 euros si le nombre obtenu est pair et un euro si c'est un multiple de 3.

On perd un euro sinon.

Quelle variable aléatoire X permet de modéliser cette situation ? Quelles sont les valeurs prises par X ?

Exercice 5

Dans une urne il y a deux boules vertes numérotées de 1 et 2 et deux boules jaunes numérotées 3 et 4. On tire deux boules au hasard successivement sans remise dans cette urne et on effectue le produit des numéros portés par les deux boules.

Quelle variable aléatoire X permet de modéliser cette situation ? Quelles sont les valeurs prises par X ?

Exercice 6

1) On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de coté « pile » obtenu.
   a) À l'aide d'un arbre, déterminer toutes les issues possibles associées à cette expérience.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer $P(X \geqslant 1)$.

Exercice 7

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On lance deux dés cubiques équilibrés et on fait la somme des chiffres obtenus.

Un joueur gagne 10 € s'il obtient 12, il gagne 3 € si la somme des chiffres est un nombre impair, sinon le joueur perd 5 €.

1) Quel est l'univers de cette expérience aléatoire ?
2) Déterminer la loi de probabilité sur Ω
3) On définit une variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le montant du gain. Déterminer la loi de probabilité de X

Correction en vidéo

Exercice 8

On vous propose le jeu suivant :

Pour jouer, il faut payer 2 €.

Ensuite, on lance 3 fois de suite une pièce bien équilibrée.

Chaque pile rapporte 3 €et chaque face fait perdre 2 €.

On considère la variable aléatoire G égale au gain algébrique du joueur.

Déterminer la loi de probabilité de G et son espérance.

Correction en vidéo

Exercice 9

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32. Dans chaque cas déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de points :

1) On gagne 10 points si on tire une figure, 3 points si on tire un 10, et 1 point si on tire une autre carte.
2) On gagne 50 points si on tire l'as de trèfle, 25 points pour un autre as, 13 points si on tire le roi ou la dame de pique, 9 points pour les autres figures et on perd 37 points si on tire une autre carte.

Exercice 10

Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X.
Si besoin arrondir à 10^{-2}.

1)

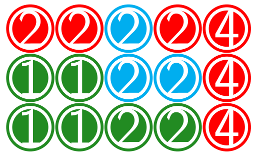
x_i	-5	0	7
$P(X=x_i)$	$0,3$	$0,4$	$0,3$

2)

x_i	-4	-3	2	5
$P(X=x_i)$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,1$

Exercice 11

Une urne contient les jetons, indiscernables au toucher, représentés ci-dessous.



1) Soit X la variable aléatoire qui associe, au tirage d'un jeton dans l'urne, la valeur du nombre inscrit dessus.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
2) On suppose maintenant que les jetons verts comptent double, les jetons rouges comptent pour moitié et les jetons bleus sont sans effet. Soit Y la variable aléatoire qui associe, au tirage d'un jeton dans l'urne, la valeur du nombre inscrit sur celui-ci en tenant compte des modifications.
   Déterminer la loi de probabilité de Y.

Sujets E3C

Exercice 12

Dans un club d'aviron, les adhérents peuvent choisir une formule d'entraînements uniquement le weekend, ou bien une formule d'entraînements le weekend et la semaine.
De plus, ils peuvent adhérer au club uniquement pour accéder à toutes les installations intérieures (rameurs, salle de musculation, etc) sans profiter des entraînements sur l'eau.
Enfin, ils ont la possibilité de s'inscrire à des séances de fitness complémentaires.
La répartition des différents adhérents est donnée dans le tableau ci-dessous :

	WE	**WE-Semaine**	**Salle**	**Total**
Fitness	20		70	
Pas fitness		190		350
Total	150			450

1) Compléter le tableau à double entrée.
2) Le prix à l'année pour la formule weekend uniquement est de 450 €, 505 € pour la formule weekend et semaine, et 400 € pour la formule en salle. De plus, l'inscription aux séances de fitness coûte 30 € par an.
   On note X le montant des frais d'inscription payés par un adhérent choisi au hasard dans ce club d'aviron.
   a) Déterminer les valeurs prises par X.
   b) Donner la loi de probabilité de X.
3) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 13

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :

- Des macarons, choisi par 50 % des clients ;
- une part de tarte tatin, choisie par 30 % des clients ;
- 20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur constate :

- que parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
- que parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60 % prennent un café ;
- que parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant. On note les évènements :

- M : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- T : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- P : « Le client ne prend pas de dessert » ;
- C : « Le client prend un café ».

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) a) Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$ puis calculer $p(M \cap C)$.
   b) Montrer que $p(C) = 0{,}76$.
3) Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ?
4) Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte tatin est vendue 7 €, et un café est vendu 2 €. Chaque client prend un seul plat au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert ni plus d'un café.
   a) Quelles sont les six valeurs possibles pour la somme totale dépensée par un client ?
   b) Compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de la somme totale dépensée par un client :

Sommes s_i	18	20	24	...	...	...
Probas p_i	0,02	0,18	...			

   c) Calculer l'espérance mathématique de cette variable aléatoire et interpréter ce résultat.

Exercice 14

Ce QCM comprend 5 questions.
Pour chacune des questions, une seule des quatre réponses proposées est correcte.
Les questions sont indépendantes.
Une urne contient 150 jetons rouges et 50 jetons bleus, tous indiscernables au toucher. 20 % des jetons rouges sont gagnants et 40 % des jetons bleus sont gagnants.
Un joueur tire au hasard un jeton de l'urne.

Question 1

La probabilité que le jeton soit rouge et gagnant est :

a. $0,2$	**b.** $0,45$	**c.** $0,15$	**d.** $0,95$

Question 2

La probabilité que le jeton soit gagnant est :

a. $0,2$	**b.** $0,6$	**c.** $0,25$	**d.** $0,95$

Question 3

Un joueur tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne. La probabilité qu'il tire deux jetons rouges est :

a. $0,5625$	**b.** $0,75$	**c.** $0,30$	**d.** $0,15$

On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique en euros d'un joueur.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

Valeurs a prises par X	-5	0	10
$P(X=a)$	0,6	0,15	0,25

Question 4

La probabilité $P(X > 0)$ est égale à :

a. $0,15$	**b.** $0,6$	**c.** 10	**d.** $0,25$

Question 5

Le gain algébrique moyen en euros que peut espérer un joueur est égale à :

a. 0	**b.** $-0,5$	**c.** $\frac{5}{3}$	**d.** 5

Exercice 15

Une étude statistique menée lors des entraînements montre que, pour un tir au but, Karim marque avec une probabilité de $0,7$.
Karim effectue une série de 3 tirs au but. Les deux issues possibles après chaque tir sont les évènements :

- M : « Karim marque un but » ;
- R : « Karim rate le tir au but ».

On admet que les tirs au but de Karim sont indépendants.

1) On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre total de buts marqués à l'issue de cette série de tirs par Karim.
   a) Réaliser un arbre pondéré permettant de décrire toutes les issues possibles.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable aléatoire X.
2) On propose à un spectateur le jeu suivant : il mise 15 € avant la série de tirs au but de Karim ; chaque but marqué par Karim lui rapporte 6 €, et chaque but manqué par Karim ne lui rapporte rien.
   On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique du spectateur, c'est- à-dire la différence entre le gain total obtenu et la mise engagée.
   a) Exprimer Y en fonction de X.
   b) Calculer l'espérance $E(Y)$ de la variable aléatoire Y.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.