MATHÉMATIQUES
AP : Le contre-exemple

Si l'on veut prouver qu'une propriété est vraie, il faut la démontrer dans le cas général à l'aide d'un théorème, d'une définition, d'une règle,.... En revanche, pour prouver qu'elle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Il s'agit en fait d'exhiber un cas (un seul suffit !) pour lequel elle n'est pas vraie. Un tel cas particulier est appelé ***contre-exemple***.

Exemple :

Est-ce que pour tout $x \geqslant 0$, $x^2 \geqslant x$?

Pour prouver que cette propriété est fausse, il faut trouver un réel x qui vérifie l'***hypothèse*** $x \geqslant 0$ mais qui ne vérifie pas la ***conclusion*** $x^2 \geqslant x$.
En prenant, $x = \dfrac{1}{2}$ qui est positif, on trouve $x^2 = \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{2} = x$ (dans ce cas on n'a pas $x^2 \geqslant x$). Ainsi, un seul cas convenablement choisi ($x = \dfrac{1}{2}$) a suffit pour démontrer que la propriété est fausse. On dit que $x = \dfrac{1}{2}$ est un contre-exemple.

On peut remarquer qu' en modifiant simplement l'hypothèse : "pour tout $x \geqslant 0$" par "pour tout $x \geqslant 1$", la propriété est vraie. On peut le démontrer...

Les phrases suivantes sont fausses. Exhiber un contre-exemple dans chacun des cas suivants :

1. Tous les réels ont un inverse.

2. La racine carrée de la somme de deux nombres positifs ou nuls est toujours égale à la somme des racines carrées de ces deux nombres.

3. La racine carrée d'un nombre entier est un irrationnel.

4. L'inverse d'un entier autre que 0 est un décimal.

5. Si $x(x-3) = 0$, alors $x = 3$.

6. Si $x < 1$, alors $x < 0$.

7. Si $x < 2$, alors $x^2 < 4$.

8. Pour tout x, $-x$ est un nombre négatif.

9. Pour tout entier n, si n est divisible par 3, il est divisible par 6.

10. Si $1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $-1 \leqslant x < 2$.

11. Si $x \in [1\,;5[$, alors $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

12. Si $x \in [0\,;10]$, alors x est un entier naturel.