MATHÉMATIQUES
AP : Montrer une égalité

Enoncé :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 + 6x + 9$.

Montrer que pour tout nombre réel x, on a : $f(x) = (x+3)^2 + x^2$

Expliquer pourquoi les deux réponses suivantes sont incorrectes.

Réponse 1 : si on prend $x = 1$,
• Lorsqu'on remplace dans la première expression, on obtient : $f(1) = 2 \times 1^2 + 6 \times 1 + 9 = 2 + 6 + 9 = 17$

• Lorsqu'on remplace dans la deuxième expression, on obtient $f(1) = (1+3)^2 + 1^2 = 4^2 + 1^2 = 16 + 1 = 17$

On a donc bien $f(x) = (x+3)^2 + x^2$.

Réponse 2 :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)^2 + x^2 \\ &= x^2 + 6x + 9 + x^2 \\ &= 2x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

On a donc bien le résultat demandé.

Pour montrer une égalité du type $A = B$, plusieurs méthodes peuvent être employées (tout dépend de l'égalité ...). En voici les quatre principales :

Méthode 1	Méthode 2	Méthode 3	Méthode 4
$\begin{aligned} A &= \text{.....} \\ &= \text{.....} \\ &= B \end{aligned}$	$\begin{aligned} B &= \text{.....} \\ &= \text{.....} \\ &= A \end{aligned}$	$\begin{aligned} A - B &= \text{....} \\ &= \text{.....} \\ &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} A &= \text{....} \\ &= \text{.....} \\ &= C \end{aligned}$ $\begin{aligned} B &= \text{...} \\ &= \text{...} \\ &= C \end{aligned}$

Dans chacun des quatre cas, la conclusion est la même : "on en déduit $A = B$".

Démontrer l'égalité de l'énoncé.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercices

Exercice 1 :
Démontrer les égalités suivantes :

1. $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = \dfrac{3^4 - 1}{2}$.

2. $2x^2 - 8x + 15 = 2(x-2)^2 + 7$.

3. $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$.

4. $(x+5)(x-3) = (x+1)^2 - 16$.

Exercice 2 :
Démontrer les égalités suivantes :

1. $\dfrac{5-\sqrt{2}}{23} = \dfrac{1}{5+\sqrt{2}}$.

2. $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \dfrac{b}{2}\right)^2 + \dfrac{3b^2}{4}$.

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (1 - 2x)^2 - 9$.

1. Montrer que $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$.

2. Montrer que $f(x) = (4 - 2x)(-2 - 2x)$.

Exercice 4 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$.

1. Montrer que $f(x) = (2x + 6)(x - 5)$.

2. Montrer que $f(x) = (2x + 2)(x - 3) - 24$.

Exercice 5 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 6)(2x + 2)$$

1. Montrer que $f(x) = 2x^2 - 10x - 12$.

2. Montrer que $f(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{49}{2}$.

Exercice 6 :

Soit $g(x) = x^2 - 4x - 5$ ***forme 1***

1. a. Montrer que $g(x) = (x-2)^2 - 9$ ***forme 2***

b. Montrer que $g(x) = (x-5)(x+1)$ ***forme 3***

2. On vient donc de trouver trois écritures différentes de $g(x)$.
En utilisant la "bonne" écriture de $g(x)$ (parmi les trois précédentes), répondre aux questions suivantes :

a. **(i)** Calculer $g(0)$.
(ii) Calculer $g(5)$.
(iii) Calculer $g(2)$.

b. **(i)** Déterminer les antécédents de 0 par g.
(ii) Résoudre $g(x) = 7$.
(iii) Résoudre $g(x) = -5$.
(iv) Résoudre $g(x) = -4x$.
(v) Résoudre $g(x) = x^2$.