MATHÉMATIQUES
AP : Outils pour la démonstration

I. Vocabulaire

propriété

Une **propriété mathématique** est une affirmation qui est toujours vraie. Elle ne comporte aucune exception.

Exemple :
L'énoncé : " Si M est un point de la médiatrice du segment $[AB]$ alors M est équidistant de A et de B" est toujours vrai : c'est donc une propriété.

Hypothèse - Conclusion

On note P la phrase : "M est un point de la médiatrice du segment $[AB]$ "
On note Q la phrase : " M est équidistant de A et B".
On dit que P **implique** Q et on note alors **P** $\Rightarrow$ **Q**.
P est appelé **l'hypothèse** ; Q est appelé la **conclusion**.

Réciproque

L'énoncé réciproque d'une propriété s'obtient en inversant conclusion et hypothèse. Si l'énoncé réciproque est vrai, il est appelé **propriété réciproque**.

Exemples :
— L'énoncé réciproque de la propriété ci-dessus est : " Si M est équidistant de A et de B alors M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ " . Cet énoncé est vrai, c'est donc une propriété réciproque .
— L'énoncé " si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires " est un énoncé vrai : c'est donc une propriété. L'énoncé réciproque est faux.

équivalence

Quand l'énoncé réciproque d'une propriété est vrai, on peut regrouper propriété et propriété réciproque en un seul énoncé utilisant l'expression **si et seulement si**. On dit que l'on a une **équivalence** et on note :

$$\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{Q}.$$

Exemple :
Un point appartient à la médiatrice d'un segment si et seulement si il est équidistant des deux extrémités de ce segment.

II. Démontrer

Vérifier

Vérifier une affirmation sur quelques exemples n'est pas démontrer.

Exemple :
Quelqu'un affirme : "Pour toutes les valeurs de x, le nombre $x^2 - x + 41$ est un nombre premier".
On peut vérifier cette affirmation en remplaçant x par $0, 1, 2, \cdots$. Le fait de trouver toujours un nombre premier n'est pas une démonstration. D'ailleurs, l'affirmation est fausse (pour $x = 41; x^2 - x + 41 = 1681 = 41^2$).

Voir

Voir sur une figure n'est pas démontrer.

Exemple :
Construire un triangle ABC isocèle en A, de base 8 cm et de hauteur AH mesurant 7 cm. On voit très bien que le triangle est équilatéral, mais cela ne le démontre pas. D'ailleurs, il ne l'est pas. (Utiliser Pythagore pour montrer que AB $= \sqrt{65} \approx 8{,}06$)

Conjecturer

Conjecturer c'est formuler (supposer, deviner, imaginer, émettre, ...) des hypothèses.

Remarques :

— Voir sur une figure et vérifier sont des étapes permettant de conjecturer. Mais après la conjecture, il faut démontrer ce que l'on a supposé . Une conjecture peut être vraie ou fausse.

— Il y a des conjecture célèbres : Goldbach (1690-1764)" tout nombre pair supérieur à deux est somme de deux nombres premiers ". Cette conjecture n'est toujours pas prouvée mais il n'y a toujours pas de contre-exemple.

Prouver, montrer, démontrer

c'est réaliser un raisonnement qui est rédigé à partir des données du problème, grâce aux outils de la démonstration (définitions ou propriétés).
En déduire que c'est utiliser impérativement le résultat de la question précédente dans un nouveau raisonnement.

III. Les différents raisonnements

1. Prouver que quelque chose est vrai.

Déduction

Effectuer un **raisonnement déductif**, c'est à partir des données du problème, aboutir à la conclusion souhaitée en utilisant les outils du cours (définitions, propriétés, formule...).

2. Prouver que quelque chose est faux.

Contre exemple

Raisonner par **contre-exemple,** c'est trouver un exemple qui met en échec la conclusion de la proposition tout en respectant les hypothèses de celle-ci.

Quelqu'un affirme : " Si les diagonales d'un quadrilatère sont égales, alors c'est un rectangle." On peut dire que c'est faux, et pour le démontrer, il suffit de dessiner un quadrilatère dont les diagonales sont de même longueur, mais qui ne soit pas un rectangle.

Absurde

Raisonner par l'absurde c'est prendre pour hypothèse la négation du résultat à démontrer, puis effectuer un raisonnement déductif qui amène à une contradiction avec une donnée du problème ou avec une propriété connue.

Exemple :
Démontrer que le triangle dont les côtés ont pour longueur 5, 6 et 7 cm n'est pas un triangle rectangle.

On suppose que ce triangle est rectangle. D'après la propriété de Pythagore, on devrait avoir "$7^2 = 6^2 + 5^2$". Or $7^2 = 49$ et $6^2 + 5^2 = 61$. L'égalité est fausse, la supposition faite est donc fausse, d'où le triangle n'est pas rectangle.

Exercice 1

Dans cet exercice, on fera bien attention à la distinction entre énoncé et propriété.

1. On énonce la propriété suivante : "Si un triangle est isocèle, alors il a deux angles de même mesure ". Ecrire l'énoncé réciproque de cette propriété sous la forme : "si . . . alors . . . ". Cet énoncé réciproque est-il vrai ?

2. On énonce une autre propriété : "Si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales sont de même longueur ". Ecrire l'énoncé réciproque de cette propriété. Cet énoncé réciproque est-il vrai ?

3. Reprendre les énoncés de la question 1. et les écrire si cela est possible à l'aide d'une équivalence.

4. Ecrire le théorème de Pythagore sous la forme d'une équivalence.

5. Ecrire en deux énoncés séparés le texte suivant : "Un quadrilatère est un rectangle si et seulement si ses diagonales ont le même milieu et sont de même longueurs."

Exercice 2

Pour chacun des énoncés suivants :

- donner son énoncé réciproque ;
- dire si l'énoncé donné est vrai ;
- dire si l'énoncé réciproque est vrai.

1. Si un triangle ABC est inscrit dans un cercle de diamètre $[AB]$, alors il est rectangle en C.

2. Si une droite passe par le milieu de deux côtés d'un triangle, alors elle est parallèle au troisième côté.

3. Si un triangle a une hauteur qui est aussi médiane, alors il est isocèle.

4. Si un triangle est équilatéral, alors il est rectangle.

5. Si trois droites passant chacune par un sommet du triangle sont concourantes, alors ces trois droites sont les médianes du triangle.

6. Si un triangle est rectangle, il est inscriptible dans un demi cercle.

Exercice 3

Pour chaque ligne du tableau, dire si la proposition P implique la proposition Q, si la proposition Q implique la proposition P ou s'il y a équivalence.

Proposition P	Proposition Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
M est une point de la médiatrice de [AB]	M équidistant de A et de B			
Je réside en France	je réside en Europe			
Je suis majeur	j'ai 19 ans			
$CDEF$ est un parallélogramme	$CDEF$ est un carré			
$x = 3$	$x^2 = 9$			
MNP est rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$			
$x \geqslant -2$	$x \geqslant -1$			
$a + b = 5$	$a = 2$ et $b = 3$			
$4x - (x - 5) = 7$	$x = \frac{2}{3}$			
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$			

Exercice 4

Toutes les affirmations suivantes sont fausses. Pour chacune, donner un contre exemple.

1. Si $x^2 \geqslant 4$, alors $x \geqslant 2$.
2. Pour tout couple de réels $(x; y)$, on a $(x + y)^3 = x^3 + y^3$.
3. Si $x^2 = 9$ alors $x = 3$.
4. Pour tout couple de réels positifs $(a; b)$, on a $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b}$.
5. Pour tout réel p, le réel $-10p$ est négatif.
6. Il n'existe pas d'équation qui admette cinq solutions réelles distinctes.
7. Tous les réels ont un inverse.
8. La racine carrée de la somme de deux nombres positifs ou nuls est toujours égale à la somme des racines carrées de ces deux nombres.
9. Tous les multiples de 5 sont des multiples de 10.
10. Si $x(x - 3) = 0$, alors $x = 3$.
11. Si $x < 1$, alors $x < 0$.
12. Si $x < 2$, alors $x^2 < 4$.
13. Pour tout x, $-x$ est un nombre négatif.
14. Pour tout entier n, si n est divisible par 3, il est divisible par 6.
15. Si $1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $-1 \leqslant x < 2$.
16. Si $x \in [1\,;\,5[$, alors $-3 \leqslant x \leqslant 4$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .