Mathématiques
Corrigé du sujet France septembre 2019

Exercice 1

1. Calcul de BD :

Le triangle BCD est rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} BD^2 &= BC^2 + CD^2 \\ BD^2 &= 1,5^2 + 2^2 \\ BD^2 &= 6,25 \\ BD &= \sqrt{6,25} \\ BD &= 2,5 \end{aligned}$$

La longueur BD est bien égale à 2,5 km.

Pensez-y !
Il est hors de question de trouver une valeur autre que 2,5. L'énoncé est clair.

2. Position des droites (BC) et (EF) :

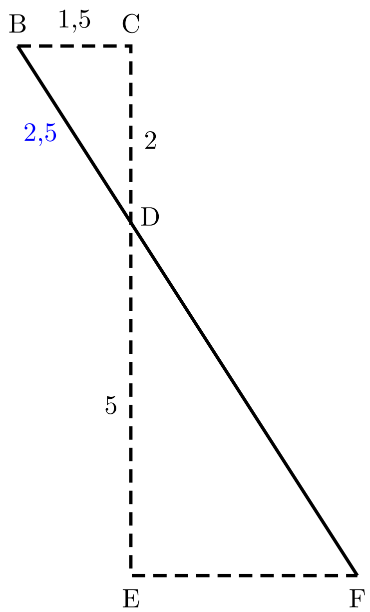
Les triangles BCD et DEF sont rectangles respectivement en C et E.
Ainsi :

$$\left.\begin{array}{l} (BC) \perp (CD) \\ \\ (EF) \perp (DE) \text{ donc } (EF) \perp (CD) \end{array}\right\} \text{donc, } (BC)//(EF)$$

Méthode
Indiquez les hypothèses qui permettent d'utiliser le théorème :"Si deux droites (ici (BC) et (EF)) sont perpendiculaires à une même droite (ici (CD)), alors ces deux droites sont parallèles".

3. Calcul de DF :

On utilise le théorème de Thalès avec la figure ci-dessous :



Méthode
De la figure de l'énoncé, faites apparaître la figure clé qui va permettre d'utiliser un théorème (ici, le théorème de Thalès).

Les points C, D et E sont alignés.
Les points B, D et F sont également alignés.
Les droites (BC) et (EF) sont parallèles, d'après la question précédente.

Remarque
Les deux triangles BCD et DEF sont en configuration de Thalès.

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{DE}{DC} = \frac{DF}{DB} = \frac{EF}{BC}$$

Rappel

Le point D est le sommet commun des triangles BCD et DEF. Aux numérateurs, on retrouve les longueurs du triangle BCD et aux dénominateurs, celles (correspondantes) du triangle DEF.

En remplaçant les longueurs par les valeurs, on obtient :

$$\boxed{\frac{5}{2} = \frac{DF}{2,5}} = \frac{EF}{1,5}$$

En utilisant l'égalité des deux quotients encadrés, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2} &= \frac{DF}{2,5} \\
2 \times DF &= 5 \times 2,5 \quad \text{Egalité des produits en croix} \\
2DF &= 12,5 \\
DF &= \frac{12,5}{2} \\
DF &= 6,25
\end{aligned}$$

La longueur DF est égale à 6,25 km.

4. Longueur totale du parcours.

La longueur totale ℓ du parcours est donnée par :

$$\begin{aligned}
\ell &= AB + BD + DF + FG \\
&= 7 + 2,5 + 6,25 + 3,5 \\
&= 19,25
\end{aligned}$$

La longueur totale du parcours est 19,25 km.

5. Calcul d'un temps.

La distance AB est 7 km. La vitesse moyenne est de 16 km/h.
En notant v, la vitesse, d la distance et t le temps, on a :

$$\begin{aligned}
v &= \frac{d}{t} \\
16 &= \frac{7}{t} \\
16 \times t &= 7 \\
t &= \frac{7}{16} \\
t &= 0,4375
\end{aligned}$$

Pensez-y !

Repartez toujours de la formule $v = \frac{d}{t}$ pour isoler ensuite (avec un produit en croix) la variable souhaitée (ici t). Faites attention aussi aux unités.

Le temps mis par Michel pour aller du point A au point B est 0,4375 h.

Conversion de ce temps en minutes et secondes :

$0,4375 \times 60 = 26,25$.
0,4375 h = 26,25 min = 26 min + 0,25 min.

$0,25 \times 60 = 15$.
0,25 min= 15 s.

Pour parcourir les 7 km, le temps mis par Michel est donc 26 minutes et 15 secondes.

Exercice 2

1. a. Décomposition en facteurs premiers de 2744.

2 744	2
1 372	2
686	2
343	7
49	7
7	7
1	

La décomposition en produit de facteurs premiers de 2744 est $2744 = 2^3 \times 7^3$.

b. Décomposition en produit de facteurs premiers $\mathbf{2744^2}$.

Puisque $2744 = 2^3 \times 7^3$, on en déduit que $2744^2 = (2^3 \times 7^3)^2 = 2^6 \times 7^6$.

Remarque

On utilise la décomposition précédente.
Il est hors de question de calculer 2744^2 et d'en déduire sa décomposition.
Si vous regardez bien la consigne, elle commence par : "En déduire".

c. Recherche d'une valeur de x.

On cherche x tel que $x^3 = 2744^2$. Or, d'après la question précédente, on a $2744^2 = 2^6 \times 7^6$.

On cherche donc x tel que $x^3 = 2^6 \times 7^6$. Or, $2^6 \times 7^6 = (2^2 \times 7^2)^3$.

On cherche donc x tel que $x^3 = (2^2 \times 7^2)^3$.

Ainsi, $x = 2^2 \times 7^2 = 196$ (on a bien $2744^2 = 196^3$).

Remarque

N'hésitez pas à utiliser votre calculatrice afin de vérifier ce résultat ($196^3 = 2744^2$).

2. a. Calcul de b.
L'égalité $a^3 = b^2$ appliquée à $a = 100$ donne $100^3 = b^2$.

Or, $100 = 10^2$, donc $100^3 = (10^2)^3 = (10^3)^2$.

On cherche donc b tel que $(10^3)^2 = b^2$.
On trouve donc $b = 10^3 = 1000$.

Remarque

$100^3 = 1000000$ et $\sqrt{1000000} = 1000$.

b. Recherche des nombres a et b.

On cherche un nombre a dont le carré est égal au cube d'un nombre b soit $a^3 = b^2$.
Pour déterminer ces deux nombres, on peut tester les différentes possibilités en calculant les premiers cubes et en regardant si l'on obtient un carré :

a	3	4	5	6	7	8	9
a^3	27	$64 = 8^2$	125	216	343	512	$729 = 27^2$

Parmi tous ces cubes, 64 et 729 sont des carrés :
$64 = 8^2$ et $27^2 = 729$.

Ainsi, les nombres a et b inférieurs à 10 qui vérifient $a^3 = b^2$ sont $a = 4$ et $b = 8$. On a bien $4^3 = 8^2 = 64$.

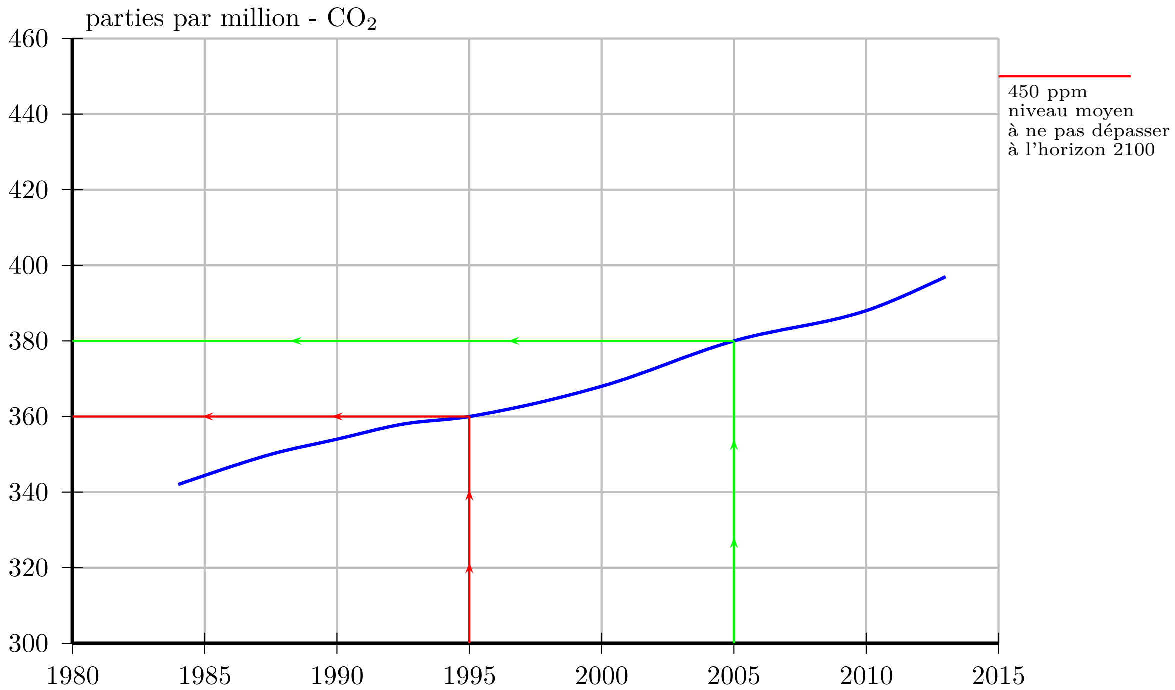
Calculatrice

Pour vérifier qu'un nombre est ou n'est pas le carré d'un autre nombre, on utilise la calculatrice. Par exemple, $\sqrt{216} \simeq 14,7$, ce qui signifie que 216 n'est pas le carré d'un nombre entier.

Exercice 3

1. Lectures graphiques.

- La concentration de CO_2 en 1995 est 360 ppm (traces graphiques rouges) ;
- La concentration de CO_2 en 2005 est 380 ppm (traces graphiques vertes) ;



2. a. Modélisation par une fonction affine.

La courbe représentant la fonction est proche d'une droite ce qui est caractéristique d'une fonction affine. Ainsi, une fonction affine semble appropriée pour modéliser cette situation.

b. Choix de l'expression.

On utilise les deux expressions pour calculer les images de 1995 et 2005 et on compare avec les résultats obtenus graphiquement dans la première question :

- Pour 1995 :

Avec la proposition d'Arnold, on trouve :

$$g(1995) = 2 \times 1995 - 3630 = 360$$

Avec la proposition de Billy, on trouve :

$$g(1995) = 2 \times 1995 - 2000 = 1990$$

Remarque

Il est inutile d'utiliser l'autre valeur puisque pour celle-ci, seule la fonction proposée par Arnold est cohérente.

- Pour 2005 :
Avec la proposition d' Arnold, on trouve :

$$g(2005) = 2 \times 2005 - 3630 = 380$$

Avec la proposition de Billy, on trouve :

$$g(2005) = 2 \times 2005 - 2000 = 2010$$

Pour les deux années testées, c'est la fonction proposée par Arnold qui donne les meilleurs résultats puisqu'avec sa fonction les images de 1995 et 2005 sont respectivement 360 et 380 qui sont les valeurs lues sur le graphique dans la première question.

c. Détermination d'une année.

Déterminer l'année pour laquelle la valeur 450 ppm est atteinte, revient à chercher x tel que $g(x) = 450$.

$$\begin{array}{rcl} g(x) & = & 450 \\ 2x - 3630 \color{blue}{+ 3630} & = & 450 \color{blue}{+ 3630} \\ 2x & = & 4080 \\ \frac{2x}{\color{blue}{2}}x & = & \frac{4080}{\color{blue}{2}} \\ x & = & 2040 \end{array}$$

Méthode

Faites bien attention à ce que représente x et $g(x)$. Ici, on cherche une année, donc on cherche x.
Cela revient à résoudre une équation.

C'est en 2040 que la valeur 450 ppm sera atteinte si l'évolution se poursuit de la même façon.

3. Recherche de la masse M du CO_2 émis en France en 2016.

En 2016, 70 mégatonnes représentent 15 % des émissions M de carbone, alors, en notant M la masse de mégatones de CO_2, on a :
15 % de $M = 70$ soit $0,15 \times M = 70$.
On obtient donc : $M = \frac{70}{0,15} \simeq 467$.
La masse de CO_2 émis en France en 2016 est d'environ 467 mégatonnes.

Exercice 4

1. Calcul d'un ratio.

Le ratio (masse de beurre : masse de chocolat) est $\frac{75}{100}$.
On a $\frac{75}{100} = \frac{3 \times \cancel{25}}{4 \times \cancel{25}} = \frac{3}{4}$.
Le ratio (masse de beurre : masse de chocolat) sous forme de fraction irréductible est : $\frac{3}{4}$.

Automatisme

Résultat à connaître : $\frac{75}{100} = 0,75 = \frac{3}{4}$.

2. Calcul de la quantité de farine.

Il y a proportionnalité entre la masse de chocolat et la masse de farine. Ainsi, le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Masse de farine (en g)	30	x
Masse de chocolat (en g)	100	250

Proportionnalité

Pour passer de la première colonne à la deuxième, on multiplie par 2,5. Donc dans un gâteau composé de 250 g de chocolat, il faudra 2,5 fois plus de farine que dans un gâteau composé de 100 g de chocolat.

Par produit en croix, on obtient : $100 \times x = 30 \times 250$, soit $x = \dfrac{30 \times 250}{100} = 75$.
Il faut donc 75 g de farine si la masse de chocolat est 250 g.

3. Longueur du côté de la base.

Puisque la longueur du côté de la base diminue de 8 cm à chaque étage et que la longueur de la base du plus grand gâteau est 24, alors la longueur de la base du plus petit gâteau est : $24 - 8 - 8 = 8$ cm.

4. Comparaison des volumes.

- Calcul du volume de la "La tour de Pise" :

Méthode

Cette tour est un empilement de cylindres dont on connaît leurs diamètres (donc les rayons) et leurs hauteurs. La formule du volume d'un cylindre est rappelée.

Le 1^{er} cylindre a un rayon de 15 cm et une hauteur de 6 cm.
Ainsi, le volume V_1 du premier gâteau est :

$$V_1 = \pi \times 15^2 \times 6 = 1350\pi$$

Gagnez des points

Ne donnez pas de valeur approchée à ce stade. Travaillez le plus souvent possible avec des valeurs exactes.

Le 2^{e} cylindre a un rayon de 11 cm et une hauteur de 6 cm.

Remarque

Comme le diamètre diminue de 8 cm, le deuxième gâteau a un diamètre de 22 cm soit un rayon de 11 cm.

Ainsi, le volume V_2 du deuxième gâteau est :

$$V_2 = \pi \times 11^2 \times 6 = 726\pi$$

Le 3^{e} cylindre a un rayon de 8 cm et une hauteur de 6 cm.

Remarque

Comme le diamètre diminue de 8 cm, le deuxième gâteau a un diamètre de 14 cm soit un rayon de 7 cm.

Ainsi, le volume V_3 du troisième gâteau est :

$$V_3 = \pi \times 7^2 \times 6 = 294\pi$$

Le 4^{e} cylindre a un rayon de 3 cm et une hauteur de 6 cm.

Remarque

Comme le diamètre diminue de 8 cm, le deuxième gâteau a un diamètre de 6 cm soit un rayon de 3 cm.

Ainsi, le volume V_4 du quatrième gâteau est :

$$V_4 = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$$

Le volume total du gâteau est donc la somme des 4 volumes précédents : $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 + V_4 &= 1350\pi + 726\pi + 294\pi + 54\pi \\ &= 2424\pi \end{aligned}$$

Le volume total du gâteau "La tour de Pise" est 2424π cm^3 soit environ 7615 cm^3.

- Calcul du volume du gâteau "La tour Carrée" :

Méthode

Cette tour est un empilement de pavés dont on connaît les longueurs des côtés des bases.

La longueur de la base du 1er pavé est 24 cm et sa hauteur est 8 cm.
Ainsi, le volume V_1 du premier gâteau est :

$$V_1 = 24 \times 24 \times 8 = 4608$$

Rappel

Pour calculer le volume d'un pavé, on multiplie les trois dimensions entre elles.

La longueur de la base du 2^{e} pavé est 16 cm et sa hauteur est 8 cm.

Ainsi, le volume V_2 du deuxième gâteau est :

$$V_2 = 16 \times 16 \times 8 = 2048$$

La longueur de la base du 3^{e} pavé est 8 cm et sa hauteur est 8 cm.

Ainsi, le volume V_3 du troisième gâteau est :

$$V_3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

Le volume total du gâteau est donc la somme des 3 volumes précédents : $V_1 + V_2 + V_3$.

$$\begin{aligned} V_1 + V_2 + V_3 &= 4608 + 2048 + 512 \\ &= 7168 \end{aligned}$$

Le volume total du gâteau "La tour Carrée" est 7168 cm^3.

- Conclusion :

Comme $7615 > 7168$.

Le gâteau qui a le plus grand volume est le gâteau "La tour de Pise".

Exercice 5

1. a. Utilisation du programme de calcul avec 4.

- Étape 1 : Choisir un nombre de départ : 4
- Étape 2 : Ajouter 6 au nombre de départ : $4 + 6 = 10$
- Étape 3 : Retrancher 5 au nombre de départ : $4 - 5 = -1$
- Étape 4 : Multiplier les résultats des étapes 2 et 3 : $10 \times (-1) = -10$
- Étape 5 : Ajouter 30 à ce produit : $-10 + 30 = 20$

- Étape 6 : Donner le résultat : 20

Le résultat est bien 20 lorsqu'on choisit 4 comme nombre de départ.

b. Utilisation du programme de calcul avec 4.

- Étape 1 : Choisir un nombre de départ : -3
- Étape 2 : Ajouter 6 au nombre de départ : $-3+6=3$
- Étape 3 : Retrancher 5 au nombre de départ : $-3-5=-8$
- Étape 4 : Multiplier les résultats des étapes 2 et 3 : $3\times(-8)=-24$
- Étape 5 : Ajouter 30 à ce produit : $-24+30=6$
- Étape 6 : Donner le résultat : 6

Le résultat est 6 lorsqu'on choisit -3 comme nombre de départ.

2. a. Vérification.

- Avec 4 comme nombre de départ :

$$\underbrace{4+4^2}_{\substack{\text{Somme du}\\ \text{nombre choisi}\\ \text{au départ et de}\\ \text{son carré}}} = 20$$

Méthode

La somme du nombre choisi au départ et de son carré se traduit mathématiquement par $x+x^2$, si le nombre choisi au départ est x.

- Avec -3 comme nombre de départ :

$$\underbrace{-3+(-3)^2}_{\substack{\text{Somme du}\\ \text{nombre choisi}\\ \text{au départ et de}\\ \text{son carré}}} = 6$$

Pensez-y !

Il est impératif de retrouver les résultats trouvés dans la première.

b. Formule dans un tableur.
A l'étape 4, on multiplie les résultats des étapes 2 et 3. Ainsi, dans la cellule B4, on écrit :

$$\boxed{=B2*B3}$$

c. Démonstration d'un résultat.

On choisit x comme nombre de départ :

- Étape 1 : Choisir un nombre de départ : x
- Étape 2 : Ajouter 6 au nombre de départ : $x+6$
- Étape 3 : Retrancher 5 au nombre de départ : $x-5$
- Étape 4 : Multiplier les résultats des étapes 2 et 3 : $(x+6)\times(x-5)$
- Étape 5 : Ajouter 30 à ce produit : $(x+6)\times(x-5)+30$
- Étape 6 : Donner le résultat : $(x+6)\times(x-5)+30$

Méthode

Pour démontrer un résultat général, on utilise le calcul littéral : en entrant x comme nombre de départ, on calcule le résultat du programme en fonction de x.

Pour vérifier le résultat annoncé, il faut développer l'expression finale trouvée : $(x+6)\times(x-5)+30$.

$$\begin{array}{rcll} (x+6)\times(x-5)+30 & = & x^2-5x+6x-30+30 & \text{On utilise la double distributivité.} \\ & = & x^2+x & \end{array}$$

Ainsi, le résultat final de ce programme de calcul lorsque le nombre choisi est x est bien x^2+x ce qui démontre le résultat de Zoé.

d. Recherche de valeurs.

Rechercher les nombres pour lesquels le résultat du programme est 0, revient à chercher les nombres x qui vérifient $x^2+x=0$.

$$\begin{array}{rcll} x^2+x & = & 0 & \\ \underbrace{x(x+1)}_{\text{Produit}} & = & \underbrace{0}_{\text{nul}} & \text{On factorise.} \\ x=0 & \text{ou} & x+1=0 & \\ x=0 & \text{ou} & x=-1 & \end{array}$$

Méthode

Pour résoudre cette équation, on transforme le premier membre pour obtenir un produit et se ramener à une équation produit nul.

Il y a donc deux nombres qui donnent comme résultat 0 à l'issue de ce programme : 0 et -1.

Vérifications :

- $0^2+0=0$.
- $(-1)^2+(-1)=1-1=0$.

Exercice 6

1. Résultat d'un match.

Les deux dés ne comportent pas de résultats identiques, il ne peut donc pas y avoir de match nul avec ces deux dés.

2. a. Calcul d'une probabilité.

Si le résultat avec le dé A est 2, Basile ne peut gagner que si elle obtient 5 avec le dé B.
Il y a trois faces numérotées 5 sur six faces au total.
Ainsi la probabilité que Basile gagne est : $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.
Basile a alors une chance sur deux de gagner.

Rappel

Dans une situation d'équiprobabilité (comme ici, puisque les six faces ont la même chance de sortir), la probabilité se calcule avec la formule :

$$\frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre total d'issues}}$$

b. Résultat d'un match.

Si le résultat avec le dé B est 1, Armelle gagne quelque soit le résultat obtenu avec son dé.
En effet les six faces du dé d'Armelle portent des numéros supérieures à 1. Ainsi la probabilité qu'Armelle gagne est : 1.
Armelle est alors certaine de gagner.

3. a. Détermination d'une probabilité.

Dans le sous-programme, la variable *FaceA* peut prendre la valeur 2 ou la valeur 5. Elle prend la valeur 2 lorsque la variable *tirage de dé* prend une valeur inférieure strictement à 5.
La variable *tirage de dé* prend une valeur strictement inférieure à 5, si elle prend l'une des valeurs 1, 2, 3 ou 4.

Explications

La variable *tirage de dé* est une variable qui simule le lancé d'un dé. Elle prend aléatoirement l'un des nombres 1, 2, 3 ,4, 5 ou 6 et de façon équiprobable.

Comme les six valeurs qu'elle peut prendre sont équiprobables, la variable ***tirage de dé*** prend l'une des valeurs 1, 2, 3 ou 4 avec une probabilité de $\frac{4}{6}$ soit $\frac{2}{3}$.

Explications

Il y a 4 issues qui donnent un résultat strictement inférieur à 5 sur un total de 6 issues possibles, d'où la probabilité de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Ce résultat est tout à fait cohérent avec le dé A. Il y a 4 faces numérotées 2 et 2 faces numérotées 6.

Ainsi, la probabilité que la variable ***FaceA*** prenne la valeur 2 est $\frac{2}{3}$.

b. Ligne 7 du programme.

FaceA et ***FaceB*** enregistrent les résultats des dés A et B. On incrémente de 1 la variable ***Victoire de A*** lorsque le résultat du dé A est plus grand que le résultat du dé B. Ainsi, dans le programme principal, on ajoute 1 à la variable ***Victoire de A*** si ***FaceB*** $<$ ***FaceB*** et on ajoute 1 à ***Victoire de B*** sinon.

Le programme complété est le suivant :

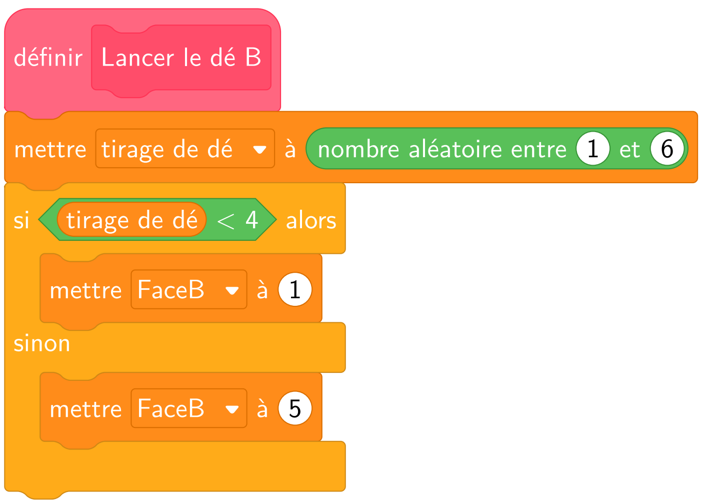
c. Rédaction du sous-programme.

Le dé B a des faces numérotées 5 et des faces numérotées 1. Il y a autant de faces numérotées 1 que de faces numérotées 5. Cela signifie que l'on a autant de chances d'obtenir 1 que d'obtenir 5.
Lorsque la variable ***tirage de dé*** donne comme résultat un nombre strictement inférieur à 4 (donc 1, 2 ou 3), la variable ***FaceA*** prend la valeur 5, sinon, elle prend la valeur 1.
On a donc bien une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'avoir 1 et aussi une probabilité de $\frac{1}{2}$ d'avoir 5.

Remarques

On pouvait échanger les valeurs de la variable entre 1 et 5, puisque la probabilité d'avoir 1 ou 5 est la même : $\frac{1}{2}$.

Voici le sous- programme B :



4. a. Calculs de fréquences.

Comme il y a 60 000 valeurs en tout $(39901 + 20099)$, la fréquence de gain du joueur A est donnée par :

$$\frac{39\ 901}{60\ 000} \simeq 0,67$$

La fréquence de gain du joueur A est d'environ 67 %.

Rappel

La fréquence d'une valeur est donnée par la formule : $\dfrac{\text{Effectif de la valeur}}{\text{Effectif total}}$.

b. Conjecture.

$\dfrac{2}{3} \simeq 67\%$, donc la probabilité que A gagne contre B semble être $\dfrac{2}{3}$.

Remarque

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une fréquence théorique qu'on appelle probabilité.