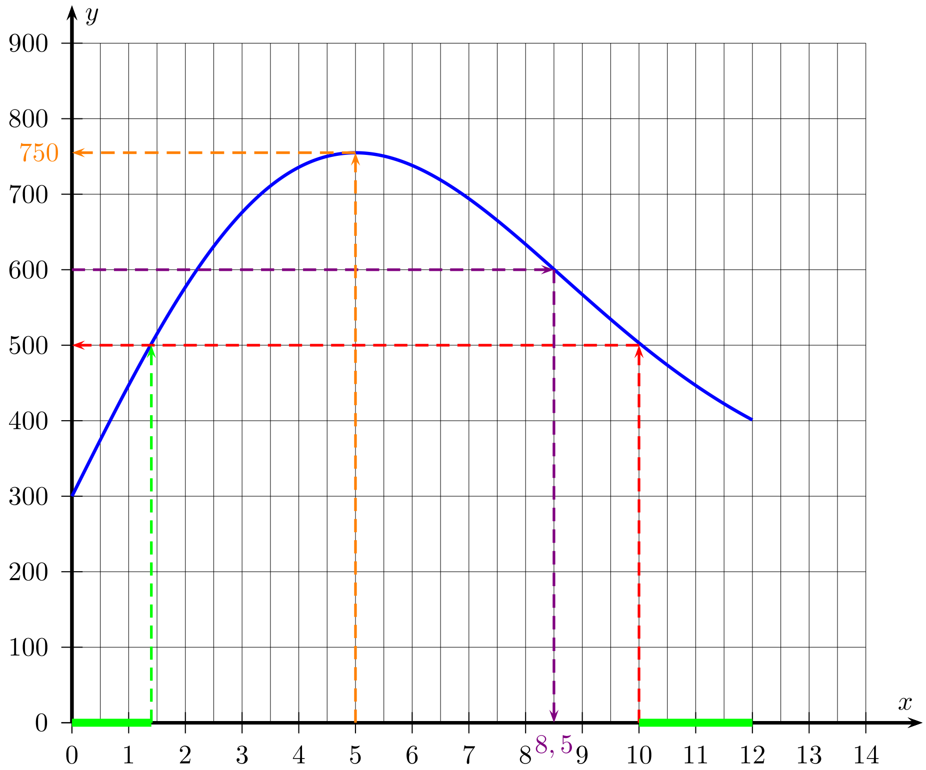
MATHEMATIQUES

Généralités sur les fonctions. Fonctions de référence : entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1



1. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 500$ est $\mathscr{S} = [0\ ;\ 1,4[\cup]10\ ;\ 12]$ (en vert sur le graphique).
Cela signifie que en début de randonnée (entre 0 et 1,4 km) et en fin de randonnée (de 10 à 12 km), l'altitude est inférieure à 500 mètres.

2. Au bout de 10 km, les randonneurs se trouvent à 500 m d'altitude (traces rouges).

3. Les randonneurs auront parcouru 8,5 km (traces violettes).

4. L'altitude maximale est 750 m. Elle est atteinte lorsque les randonneurs auront parcourus 5 km (traces oranges).

5. A la fin de la randonnée, les randonneurs ne sont pas revenus à leur point de départ car l'altitude de départ est 300 m alors que celle à l'arrivée est 400 m. Donc ce n'est pas au même endroit.

Exercice 2

1. a. $f(6) = 510 - 30 \times 6 = 330$. Il reste 330 kg de grains dans le silo 6 jours après avoir rempli le silo.

b. Déterminer l'antécédent de 360 revient à résoudre l'équation $f(x) = 360$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 360 \\ 510 - 30xx & = & 360 \\ \cancel{510} - 30x - \cancel{510} & = & 360 - 510 \\ -30x & = & -150 \\ \dfrac{-30x}{-30} & = & \dfrac{-150}{-30} \\ x & = & 5 \end{array}$$

Au bout de 5 jours (après avoir rempli le silo), il reste 360 kg de grains dans le silo.

2. On a $f(0) = 510$. On en déduit que la contenance du silo est 510 kg.

3. On cherche la valeur de x telle que $f(x) = 0$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ 510 - 30xx & = & 0 \\ \cancel{510} - 30x - \cancel{510} & = & 0 - 510 \\ -30x & = & -510 \\ \dfrac{-30x}{-30} & = & \dfrac{-510}{-30} \\ x & = & 17 \end{array}$$

Au bout de 17 jours, il n'y aura plus de grains dans le silo.

4. On calcule la différence entre la quantité de grains après $(x+1)$ jours et la quantité de grains après x jours :

$$\underbrace{(510 - 30(x+1))}_{\text{Quantité restant de grains après x+1 jours}} - \underbrace{(510 - 30x)}_{\text{Quantité restant de grains après x jours}} = 510 - 30x - 30 - 510 + 30x = -30.$$

Cela signifie qu'entre le x ième jour et le $(x+1)$ ième jour, il a été consommé 30 kg de grains.

Explications

Aux 510 kg de grains on enlève $30x$ soit 30 fois le nombre de jours écoulés après avoir rempli le silo. Par conséquent, les poulets consomment 30 kg de grains par jour.

5. La fonction est définie par :

$$g(x) = \underbrace{420}_{\text{Quantité restant de grains après 3 jours}} - \underbrace{15x}_{\text{Quantité de grains consommée en x jours}}$$

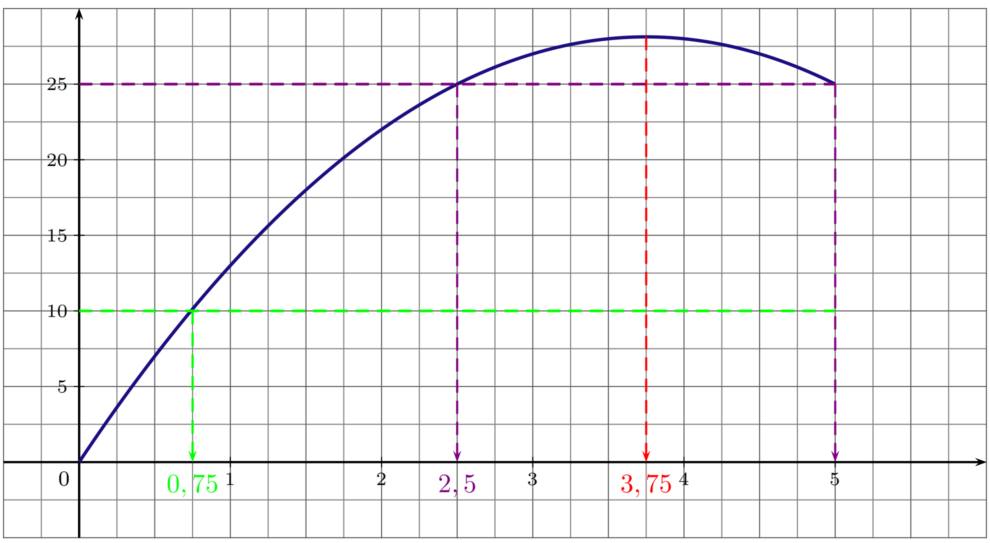
Exercice 3

1. Le point M est un point du segment $[AB]$ et $AB = 5$. On en déduit que l'ensemble de définition de f est $[0\ ;\ 5]$.

2. **a.** L'aire est maximale est lorsque $AM = 3,75$.

b. L'aire de la partie non hachurée est inférieure à 10 sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,75[$.

c. L'aire du rectangle est $5 \times 10 = 50$. On en déduit que l'aire de la partie hachurée est égale à l'aire de la partie non hachurée lorsque l'aire de la partie non hachurée vaut 25.
On obtient cette aire pour deux positions du point M sur $[AB]$: lorsque $AM = 2,5$ (le point M se situe au milieu de $[AB]$ et lorsque $AM = 5$ (dans ce cas, le point M se trouve sur le point B).



3. La surface non hachurée est constituée de deux rectangles : $MNJB$ et $PNID$.

Aire$(MNJB) = MN \times MB = x \times (5-x)$ et Aire$(PNID) = PN \times NI = x \times (10-x)$.

Ainsi, l'aire de la partie non hachurée est donnée par : $f(x) = x(5-x)+x(10-x) = 5x-x^2+10x-x^2 = -2x^2+15x$.

4. Le point A semble effectivement être sur la courbe.
Pour en être certain, il faut calculer l'image de 0,75 par f.

$f(1,75) = 15 \times 1,75 - 2 \times 1,75^2 = 20,125 \neq 20$.

On en déduit que le point A n'est pas sur la courbe.
Il se situe un peu au dessus.

Explications

Un point $M(x\ ;\ y)$ est sur $\mathscr{C}_f$ si et seulement si x est bien dans l'ensemble de définition de f et $y = f(x)$.
1,75 est bien compris entre 0 et 5, donc pour savoir si le point A est sur la courbe, il faut calculer l'image de son abscisse par f.
Si $f(1,75) = 20$, alors A est sur la courbe.
Si $f(1,75) \neq 10$, alors A n'est pas sur la courbe.

5. $f(3,75) = 15 \times 3,75 - 2 \times 3,75^2 = 28,125 > 28$.

On en déduit que l'aire de la partie non hachurée peut dépasser 28.

Explications

D'après le graphique, ce n'est pas évident. L'idée est de calculer l'image de 3,75 qui est, je vous le rappelle la valeur de x pour laquelle l'aire est la plus grande. On ne sait jamais ..... si on trouve un nombre plus grand que 28, le problème est réglé...

6. L'affirmation de Nabolos est une nouvelle fois fausse. En effet, la fonction f est strictement décroissante pour $x > 3,75$. Cela signifie que lorsque x est plus grand que 3,75, plus x augmente plus $f(x)$ diminue.

Exercice 4

1. g est une fonction affine car elle est définie sur $\mathbb{R}$ et s'écrit sous la forme $g(x) = mx + p$ avec $m = -2$ et $p = 1$.

2. Calcul de l'image de (-3) par g.

$$\begin{aligned} g(-3) &= 1 - 2 \times (-3) \\ &= 1 + 6 \\ &= 7 \end{aligned}$$

3. Antécédent de 0,5 par g.

$$\begin{aligned} 1 - 2x &= 0,5 \\ -2x &= 0,5 - 1 \\ x &= \frac{-0,5}{-2} \\ x &= 0,25 \end{aligned}$$

L'antécédent de 0,5 par g est 0,25.

Pensez-y !

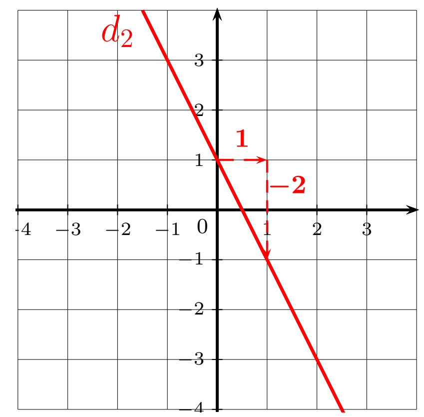
Déterminer des antécédents revient à résoudre une équation.

4. Résolution de l'inéquation $g(x) < 10000$.

$$\begin{aligned} 1 - 2x &< 10000 \\ 1 - 2x - 1 &< 10000 - 1 \\ -2x &< 9999 \\ \frac{-2x}{-2} &> \frac{9999}{-2} \\ x &> -4999,5 \end{aligned}$$

ATTENTION

On divise par un nombre négatif (-2). On change le sens de l'inégalité.



5. Pour représenter g :

- L'ordonnée à l'origine est 1.
- Le coefficient directeur est -2. On se décale d'une unité vers la droite (à partir de l'ordonnée à l'origine) et on descend de deux unités.

Exercice 5

1. On détermine le nombre de litres nécessaires pour parcourir les 80 km. Sachant que le véhicule consomme 6,5 ℓ pour 100 km et en considérant que la consommation est proportionnelle au nombre de km parcouru, on peut établir le tableau de proportionnalité suivant :

Nombre de km	100	80
Volume d'essence (en litres)	6,5	x

Rappel
Dans un tableau de proportionnalité, les produits en croix sont égaux.

On trouve $x = \dfrac{6,5 \times 80}{100} = 5,2$.
Pour 80 km, la consommation est 5,2 litres.

Attention
N'écrivez pas n'importe quoi ! Une consommation de 514 litres pour les 80 km doit vous choquer !

$5,2 \times 1,4 = 7,28$
Le coût de l'essence pour les 80 km est 7,28 €.

A ces coûts, s'ajoute le coût de la location pour le week-end : 98 €.

$98 + 7,28 = 105,28$.
Le coût total de la location est de 105,28 €.

2. a. On procède de la même façon que précédemment mais avec x le nombre de km parcourus pendant le week-end. On calcule le nombre de litres d'essence consommée avec le tableau de proportionnalité :

Nombre de km	100	x
Volume d'essence (en litres)	6,5	y

On obtient $y = \dfrac{6,5 \times x}{100} = 0,065x$.
Pour x km parcourus, la consommation en litres est $0,065x$.
$0,065x \times 1,4 = 0,091x$.
Le coût de l'essence pour ces x km est $0,091x$.
Ainsi, le coût total de la location pour le week-end est donné par : $f(x) = 98 + 0,091x$.

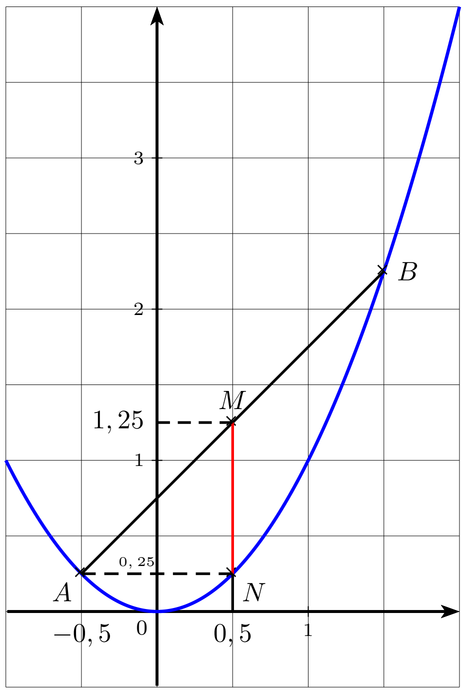
b. Recherche de la distance maximale avec un budget de 150 €.
On résout l'inéquation : $f(x) \leqslant 150$.

$$\begin{aligned}
98 + 0,091x &\leqslant 150\\
0,091x &\leqslant 150 - 98\\
0,091 &\leqslant 52\\
x &\leqslant \frac{52}{0,091}
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{52}{0,091} \simeq 571$.
Ainsi, la distance maximale que l'on peut parcourir avec un budget de 150 € est 570 km (valeur arrondie à la dizaine de km près).

Exercice 6

Voici la figure de l'exercice :



Les points A et B sont deux points de $\mathscr{C}_f$. Puisque la fonction est la fonction qui élève au carré, leurs ordonnées sont les carrés de leurs abscisses.
On a donc :

- $A(-0,5\ ;\ (-0,5)^2)$ soit $A(-0,5\ ;\ 0,25)$.
- $B(1,5\ ;\ 1,5^2)$ soit $B(1,5\ ;\ 2,25)$.

Points et courbe

Un point $M(x\ ;\ y)$ est sur $\mathscr{C}_f$ si x est dans l'ensemble de définition de f et si l'ordonnée est l'image de l'abscisse par f soit $y = f(x)$.

M est le milieu de $[AB]$.
Ainsi, $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{-0,5+1,5}{2} = 0,5$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{0,25+2,25}{2} = 1,25$.

Le point N a la même abscisse que le point M soit 0,5.
Son ordonnée est donnée par $0,5^2 = 0,25$. Ainsi $N(0,5\ ;\ 0,25)$.

La distance MN est donnée par $\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(0,5-0,5)^2 + (0,25-1,25)^2} = \sqrt{1} = 1$.
La distance maximale de MN est 1.

Distance

Ici, la distance à calculer est une distance "verticale". Elle est obtenue par la différence des ordonnées des points M et N ($y_M - y_N$ car M est au-dessus de N), soit $1,25 - 0,25 = 1$. C'est un peu plus rapide.