Lycée Louise Michel (Gisors)

Seconde

MATHEMATIQUES
Les nombres : entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

1. L'écriture décimale du nombre $5,3 \times 10^5$ est : 530 000.

2. $\dfrac{12}{\frac{3}{4}} = 12 \times \dfrac{4}{3} = 16$.

On peut remplir 16 bouteilles de $\dfrac{3}{4}$ de litre.

3. Calcul de $\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{7}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{3}+\frac{5}{6}}{7} &= \frac{\frac{12}{18}+\frac{15}{18}}{7} \\
&= \frac{\frac{27}{18}}{7} \\
&= \frac{27}{18} \times \frac{1}{7} \\
&= \frac{27}{126}
\end{aligned}$$

4. On exprime b en fonction de a :

$$\begin{aligned}
b &= 2 \times 3^5 \times 7^2 \\
&= 2 \times 3 \times \underbrace{3^4 \times 7}_{=a} \times 7 \\
&= 2 \times 3 \times 7 \times a \\
&= 42a
\end{aligned}$$

Multiple

Un multiple de a est le produit de a par un nombre entier. Autrement dit, un multiple de a est un nombre qui, divisé par a, donne un résultat entier.
Ainsi, b est un multiple de a si et seulement si il existe un entier k tel que $b = a \times k$.

b est bien un multiple de a.

5. 700 Mo = 0,7 Go.
$32 \div 0,7 \simeq 45,7$.
Il faudra 46 CD de 700 Mo pour stocker autant de données qu'une clé de 32 Go.

Mo et Go

1 Go = 1 000 Mo

6. $1,0449 < 1,045 < 1,0451$ $\quad$ $2,3015 < 2,30154 < 2,3016$ $\quad$ $0,9999 < 1 < 1,0001$

7.

Vrai/Faux : comment procéder ?

Si l'on veut prouver qu'une propriété est vraie, il faut la démontrer dans le cas général à l'aide d'un calcul littéral, d'un théorème, d'une définition, d'une règle, ...
En revanche, pour prouver qu'elle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple. Il s'agit en fait d'exhiber un cas (un seul suffit !) pour lequel elle n'est pas vraie. Un tel cas particulier est appelé ***contre-exemple***.
Le contre-exemple doit vérifier l'hypothèse (ou les hypothèses) mais ne doit pas vérifier la conclusion.

a. Affirmation 1 : FAUX

Le nombre $11 \times 13 = 143$ est un multiple à la fois de 11 et de 13.
143 est bien un multiple de 11 car il existe un entier a (en fait, c'est 13) tel que $143 = 11 \times a$ et 143 est bien un multiple de 13 car il existe un entier b (en fait, c'est 11) tel que $143 = 13 \times b$.

Confusion

Ne confondez pas diviseurs et multiples !

Affirmation 2 : FAUX

7 est un multiple de 7 et 14 est aussi un multiple de de 7.
$14 + 7 = 21$ et 21 n'est pas un multiple de 49.

Contre-exemple

Le couple (7 ; 14) est un contre-exemple car 7 et 14 sont bien des multiples de 7 (ils vérifient l'hypothèse : "deux multiples de 7", mais la conclusion n'est pas vérifiée puisque leur somme n'est pas un multiple de 49.

b. Affirmation 3 : FAUX

Le tiers de $\dfrac{2}{15}$ se calcule par : $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{15} = \dfrac{2}{45} \neq \dfrac{6}{15}$.

Attention

Le tiers de $\dfrac{6}{15}$ est $\dfrac{2}{15}$.

c. Affirmation 4 : FAUX

$$\begin{aligned} 15 - 5 \times 7 + 3 &= 15 - 35 + 3 \\ &= -20 + 3 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Priorité

Vous le saviez mais je le rappelle quand même :-)
La multiplication est prioritaire sur l' addition.

d. Affirmation 5 : FAUX

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ DE^2 = (13\sqrt{7})^2 = 13^2 \times 7 = 1183 \\ \bullet\ CE^2 + CD^2 = (\sqrt{175})^2 + (12\sqrt{7})^2 = 175 + 12^2 \times 7 = 1183 \end{array}\right\} \text{Donc : } \quad DE^2 = CD^2 + CE^2$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle CDE est bien rectangle en C.

Exercice 2

Nabolos doit donner 6 crêpes à chacun de ses cousins. En effet, $31 = 5 \times 6 + 1$ et du coup, il lui reste une crêpe.
En revanche, s'il partage les crêpes en 8 (en comptant les trois cousins supplémentaires), il lui reste 7 crêpes.
En effet, $31 = 8 \times 3 + 7$. Ainsi, les 8 cousins auront 3 crêpes chacun et il restera 7 crêpes.

Voilà pourquoi Nabolos est parti chercher ses trois autres cousins !

Exercice 3

On peut décomposer 324 en produit de facteurs premiers pour aider : $324 = 2^2 \times 3^4$.
Les diviseurs de 324 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 27 ; 36 ; 54 ; 81 ; 108 ; 162 ; 324.

Il y a donc deux possibilités : 36 et 54.

On peut faire 9 groupes de 36 ou 6 groupes de 54.

Exercice 4

1. $162 = 2 \times 81 = 2 \times 9 \times 9 = 2 \times 3^2 \times 3^2 = 2 \times 3^4$.
$108 = 2 \times 54 = 2 \times 2 \times 27 = 2^2 \times 3^3$.

2. Les diviseurs communs à 162 et 108 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 9 ; 18 ; 27 et 54.
Ils ont donc trois diviseurs communs plus grands que 10 : 18 ; 27 et 54.

3. **a.** Le cuisiner ne peut pas réaliser 36 barquettes car 36 ne divise pas 162.

b. Le plus grand commun diviseur à 162 et 108 est 54 ; le cuisinier peut donc préparer 54 barquettes.

c. On a $162 \div 54 = 3$ et $108 \div 54 = 2$. Par conséquent, chaque barquette contiendra alors 3 nems et 2 samoussas.

Exercice 5

Comment procéder ?

Pour pouvoir utiliser l'information 3 (et c'est elle qui va être décisive sur le choix), on a besoin de la distance écran-téléspectateur (tout va bien, on l'a) et la longueur de la diagonale de l'écran, que l'on a pas et donc qu'il faut calculer.

De quelles informations disposent-on pour calculer la diagonale de l'écran : de la hauteur de l'écran (60 cm), de la formule pour calculer la largeur de l'écran quand on a sa hauteur (ça tombe bien, on l'a). On peut donc déjà calculer la largeur et ayant la longueur on pourra peu-être calculer sa diagonale, non ?

La hauteur de l'écran envisagé est de $h = 60$ cm, donc sa largeur est : $\ell = \dfrac{16}{9} \times 60 = \dfrac{16}{3} \times 20 = \dfrac{320}{3}$ cm.

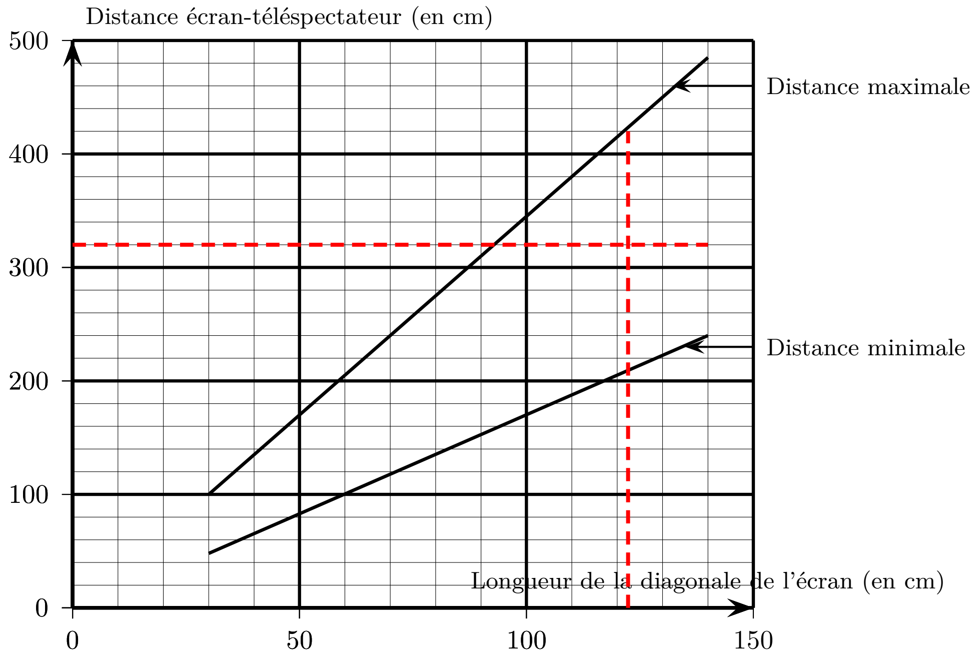
D'après le théorème de Pythagore la diagonale d de son écran (c'est un rectangle) est telle que :

$$d^2 = h^2 + \ell^2 = 60^2 + \left(\frac{320}{3}\right)^2 = \frac{134\,800}{9}$$

Ainsi,

$$d = \sqrt{\frac{134\,800}{9}} \simeq 122,4$$

Sur le graphique ci-dessous on trace donc la droite verticale d'équation $x = 122,4$ et horizontalement la droite d'équation $y = 3,20$; ces deux droites sont sécantes en un point de coordonnées (122,4 ; 3,2) et ce point est bien dans la région conseillée une distance à l'écran entre 200 et 415 cm).
Nabolos peut acheter le téléviseur.



Exercice 6

1. VRAI

$(-3)^2$ est un nombre positif, donc l'écriture $\sqrt{(-3)^2}$ a bien un sens.

Et même

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$

2. VRAI

Les règles

Si a et b sont positifs :
- $a = \sqrt{a^2}$.
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$.

$2 \times \sqrt{5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{20}.$

3. VRAI

5 et (-5) ont le même carré : 25.

4. FAUX

Seul 4 a pour racine carrée 2.

5. FAUX

$$\underbrace{\sqrt{9+16}}_{\text{Racine carrée de la somme } 9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\underbrace{\sqrt{9}+\sqrt{16}}_{\text{Somme des racines carrées de 9 et 16}} = \sqrt{9}+\sqrt{16} = 3+4 = 7$$

$5 \neq 7$, donc la proposition est fausse.

Contre-exemple

Un contre-exemple suffit pour montrer qu'une propriété est fausse.

6. FAUX

On calcule l'aire d'un carré par le carré du côté. Si c est la longueur du côté, on a $c^2 = 3$, soit $c = \sqrt{3} \neq 1,5$.

7. FAUX

Le carré de $\sqrt{2}$ s'écrit $(\sqrt{2})^2$ et est égal à 2.

Exercice 7

1. Justification de l'égalité :

$$\begin{aligned}
\frac{3}{4n}+\frac{1}{3n}+\frac{5}{12n} &= \frac{3\times 3}{4n\times 3}+\frac{1\times 4}{3n\times 4}+\frac{5}{12n} \quad \textcolor{blue}{\text{Le dénominateur commun est } 12n}\\
&= \frac{9}{12n}+\frac{4}{12n}+\frac{5}{12n}\\
&= \frac{18}{12n}\\
&= \frac{3}{2n}
\end{aligned}$$

2. On utilise le résultat précédent avec $n=7$ car dans ce cas, $2n=14$ et $\frac{3}{2n}=\frac{3}{14}$.

Comme $\frac{3}{2n}=\frac{3}{4n}+\frac{1}{3n}+\frac{5}{12n}$, alors :

$$\frac{3}{2\times 7}=\frac{3}{14}=\frac{3}{4\times 7}+\frac{1}{3\times 7}+\frac{5}{12\times 7}=\underbrace{\frac{3}{28}+\frac{1}{21}+\frac{5}{84}}_{\text{Somme de 3 fractions}}$$

Exercice 8

Question 1 :

a. Un nombre compris entre -1 et 2 est forcément compris entre -2 et 3, non ?

On a $-1\leqslant x<2$ et donc $-2<-1\leqslant x<2<3$, donc $x\in[-2\ ;\ 3]$.

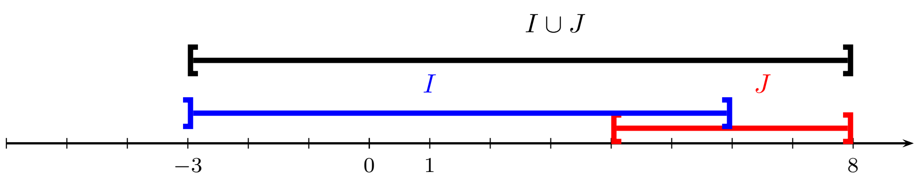
b. Non ! Un nombre compris entre -4 et 5 n'est pas forcément compris entre -3 et 3. La preuve : $4,5\in[-4\ ;\ 5]$ mais $4,5\notin[-3\ ;\ 3]$.

Le fameux contre-exemple

On cherche un nombre qui vérifie l'hypothèse (appartient à $[-4\ ;\ 5]$) mais qui ne vérifie pas la conclusion (appartient à $[-3\ ;\ 3]$).

c. Oui ! Si $x\in A\cap B$, alors $x\in A$ puisque x est à la fois dans A et dans B (puisqu'il est dans l'intersection).

d. Oui ! On fait un dessin ?



$I\cup J=[-3\ ;\ 8]$.

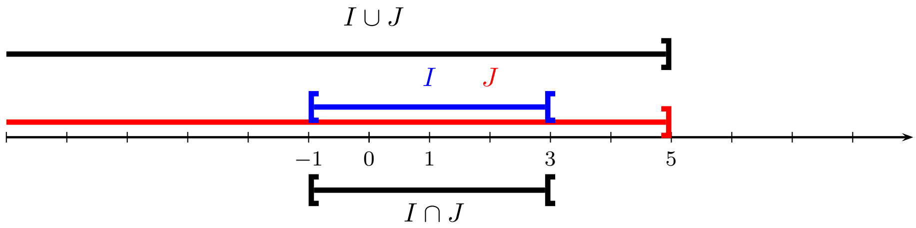
a	b	c	d
V	F	V	V

Question 2 :

a. Evident, non ?

b. Encore évident, non ?

c. On fait encore un dessin pour voir :



Donc $I \cap J = [-1\ ;\ 3[= I$ et aussi $I \cup J =]-\infty\ ;\ 5] = J$

d. Oui (voir au-dessus)