

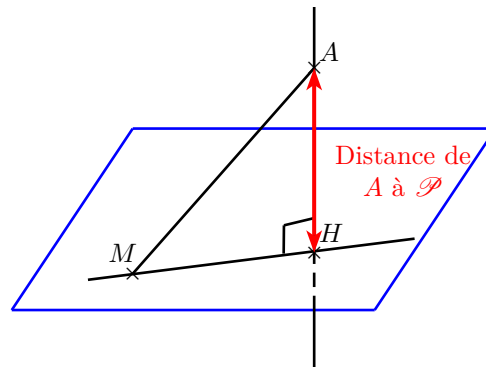
---

## MATHÉMATIQUES

### Orthogonalité et distances dans l'espace : les démonstrations

---

Soient  $A$  un point de l'espace et  $\mathcal{P}$  un plan de l'espace. Le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$  est le point  $H$  qui appartient au plan  $\mathcal{P}$  et qui est le plus proche du point  $A$ .



Soit  $H$  le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .  
Soit  $M$  un point du plan  $\mathcal{P}$  distinct du point  $H$ .

On va procéder en deux temps.

- On suppose que le point  $A$  n'appartient pas au plan  $\mathcal{P}$ .  
Ainsi les points  $A, H$  et  $M$  sont distincts et forment un plan.  
On se place dans le plan  $(AMH)$ .  
Comme le point  $M$  est distinct du point  $H$ , d'une part le triangle  $AMH$  est rectangle en  $H$  et donc  $AM$  est l'hypoténuse et d'autre part  $MH > 0$ .  
Donc, d'après le théorème de Pythagore,  $AM > AH$ .  
Ainsi le point  $H$  est bien le point du plan  $\mathcal{P}$  le plus proche du point  $A$ .
- On suppose que le point  $A$  appartient au plan  $\mathcal{P}$ .  
Il existe une unique droite orthogonale au plan  $\mathcal{P}$  passant par le point  $A$ .  
Le point d'intersection entre cette droite et le plan  $\mathcal{P}$  est le point  $H$ , le projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $\mathcal{P}$ .  
Or le point  $A$  appartient au plan  $\mathcal{P}$ .  
Donc le point  $A$  et son projeté orthogonal sont confondus.  
Ainsi  $AH = 0$ .  
Or le point  $M$  est distinct du point  $H$ .  
Donc  $AM > AH$ .  
Ainsi le point  $H$  est bien le point du plan  $\mathcal{P}$  le plus proche du point  $A$ .

Donc le point  $H$  est bien le point du plan  $\mathcal{P}$  le plus proche du point  $A$ .