Représentations paramétriques et équations cartésiennes

www.mathGM.fr

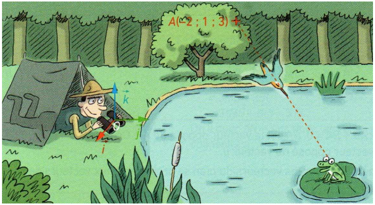
Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

80. Déterminer et utiliser la représentation paramétrique d'une droite.
81. Déterminer et utiliser une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal.
82. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur un plan ou sur une droite.

Le problème de Nabolos

Un ornithologue se situe à l'origine O d'un repère $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Il observe les mouvements d'un martin-pêcheur depuis les berges d'un lac modélisé par le plan $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Le lac est donc inclus dans ce plan.



L'oiseau repère sa proie dans l'eau ou aux abords du lac, puis effectue toujours le même vol rectiligne pour s'en saisir. L'ornithologue mesure la vitesse de l'oiseau en fonction des conditions atmosphériques. Quelques instants après son envol, le martin-pêcheur vole à une vitesse constante. Le vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées $(10;12;-15)$, chaque valeur étant exprimée en m.s^{-1}.

Le problème de Nabolos

1. Le martin-pêcheur part de l'arbuste $A(-2;1;3)$ qui abrite son nid et repère dans sa ligne de mire une grenouille sur un nénuphar. Sa trajectoire est définie par le vecteur $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V}$ où t est en secondes. On peut exprimer chaque coordonnée du point représentant l'oiseau en fonction de t.

   a. Aura-t-il atteint la surface du lac en un dixième de seconde ?

   b. Au bout de combien de temps, l'oiseau atteindra-t-il le batracien ?

   c. A cet instant fatal, où, sur le lac, se trouve exactement la grenouille ?

Le problème de Nabolos

1. Le martin-pêcheur part de l'arbuste $A(-2;1;3)$ qui abrite son nid et repère dans sa ligne de mire une grenouille sur un nénuphar. Sa trajectoire est définie par le vecteur $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{V}$ où t est en secondes. On peut exprimer chaque coordonnée du point représentant l'oiseau en fonction de t.
   a. Aura-t-il atteint la surface du lac en un dixième de seconde ?
   b. Au bout de combien de temps, l'oiseau atteindra-t-il le batracien ?
   c. A cet instant fatal, où, sur le lac, se trouve exactement la grenouille ?
2. Au même moment, une libellule attire l'attention d'un autre martin-pêcheur qui passe près du roseau $R(-2;2,5;2)$. Cet oiseau vole de manière rectiligne, à une vitesse supposée constante ; les coordonnées du vecteur vitesse sont $(20;-10;10)$, chaque valeur étant exprimée en m.s^{-1}. Les deux oiseaux vont-ils se percuter ?

Représentation paramétrique d'une droite

Représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $\left(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ de l'espace, on considère un point $A(x_A\ ;\ y_A\ ;\ z_A)$ et un vecteur non nul $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Un point $\mathrm{M}(x\ ;\ y\ ;\ z)$ appartient à la droite d passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il existe un réel t tel que :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Ce système d'équations s'appelle une représentation paramétrique de la droite d.

Remarque : Une droite admet une infinité de représentations paramétriques.

Exemple

Représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\ ;\ \vec{k})$.
Soit les points $A(2\ ;\ 3\ ;\ -1)$ et $B(1\ ;\ -3\ ;\ 2)$.
Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. Vidéo

Caractérisation des points d'un plan

Propriété

Soit $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et A un point de $\mathscr{P}$.
Un point M de l'espace appartient au plan $\mathscr{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

Equation cartésienne d'un plan

Définition - Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, tout plan $\mathscr{P}$ passant par un point $\mathsf{A}(x_{\mathsf{A}}\,;y_{\mathsf{A}}\,;z_{\mathsf{A}})$ et de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $(a\,;b\,;c) \neq (0\,;0\,;0)$ admet une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Equation cartésienne d'un plan

Définition - Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, tout plan $\mathscr{P}$ passant par un point $\mathsf{A}(x_\mathsf{A}\,;y_\mathsf{A}\,;z_\mathsf{A})$ et de vecteur normal non nul $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, c'est-à-dire $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ admet une équation de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

Cette équation est appelée équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

Propriété

Dans un repère orthonormé de l'espace, l'ensemble des points $\mathsf{M}(x\,;y\,;z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ avec $(a\,;b\,;c)\neq(0\,;0\,;0)$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$.

Exemple

Equation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$. Vidéo

Entre une droite et un plan

Propriété

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.
d et $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Entre une droite et un plan

Propriété

Soit d une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathscr{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.
d et $\mathscr{P}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

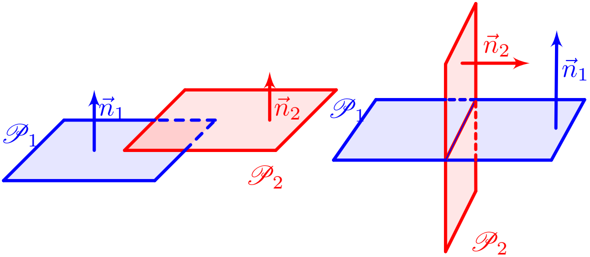
Exemple

Dans un repère orthonormé, le plan (P) a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.
Soit $A(1\ ;\ 2\ ;\ -3)$ et $B(-1\ ;\ 2\ ;\ 0)$. Déterminer l'intersection de la droite (AB) avec le plan (P). Vidéo

Entre deux plans

Propriété

Soit $\mathscr{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$:

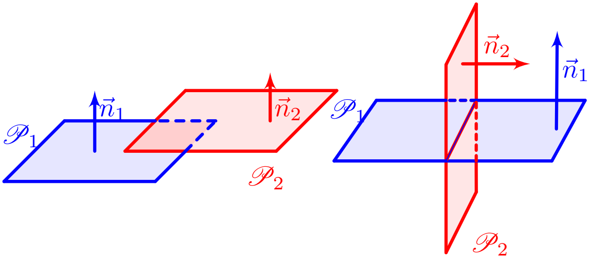


Entre deux plans

Propriété

Soit $\mathscr{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$:

- Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.

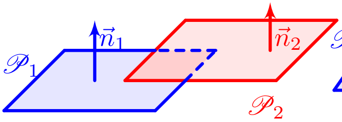


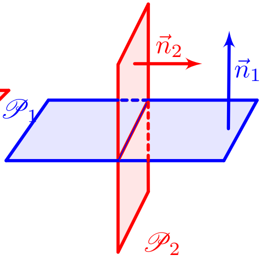
Entre deux plans

Propriété

Soit $\mathscr{P}_1$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathscr{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$:

- Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires.
- Les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orthogonaux.





Exemples

Intersection de deux plans

$(P) : -x + 2y + z - 5 = 0.$
$(P') : 2x - y + 3z - 1 = 0.$
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection (d) des plans (P) et (P'). Vidéo

Exemples

Intersection de deux plans

(P) : $-x + 2y + z - 5 = 0$.
(P') : $2x - y + 3z - 1 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection (d) des plans (P) et (P'). Vidéo

Plans orthogonaux

(P) : $2x + 4y + 4z - 3 = 0$.
(P') : $2x - 5y + 4z - 1 = 0$.
Démontrer que les plans (P) et (P') sont orthogonaux. Vidéo