MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : entraînement 2

Exercice 1

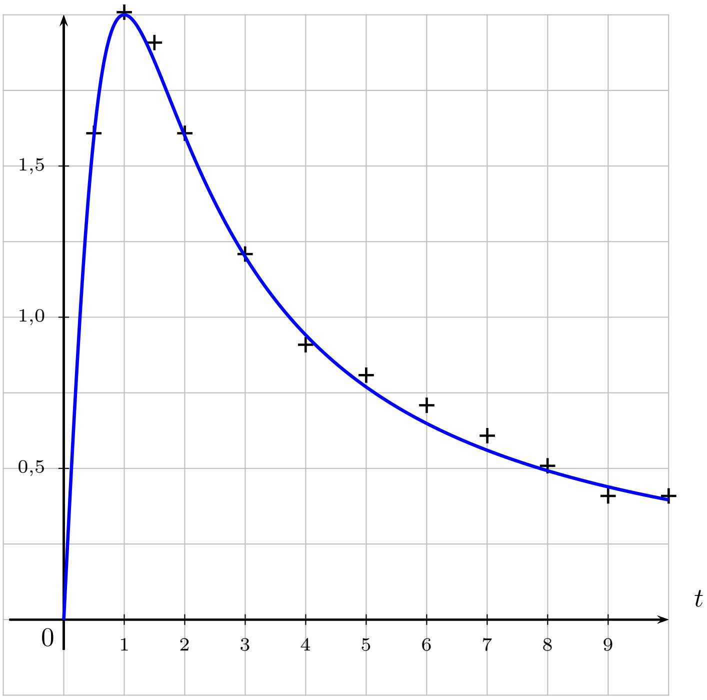
Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$g(t) = \frac{4t}{t^2+1}.$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique.
Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.



1. Par lecture graphique donner sans justification :

a. les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ +\infty[$;

b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;

c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.

2. a. Montrer que :

$$g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$

b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$. Comment peut-on interpréter ce résultat ?

4. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.

   La CMI de l'antibiotique injecté est $1,2$ mg/l.

   Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

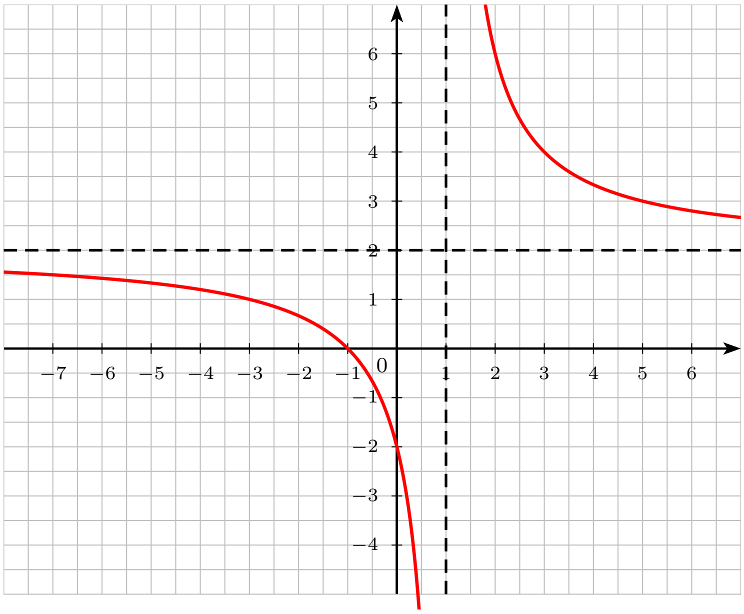
5. On donne l'algorithme suivant. Donner la valeur de la variable n à la fin de son exécution et indiquer ce que représente ce nombre.

$n \longleftarrow 1$
Tant que $\dfrac{4n}{n^2+1} \geqslant 0,07$
$n \longleftarrow n+1$
Fin Tant que

Exercice 2

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. L'exercice consiste à cocher la case correspondant à la réponse exacte, sans justifier.

On donne ci-contre la courbe représentative d'une fonction f.



1. Graphiquement, on peut conjecturer que :

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$;
☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$;
☐ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = +\infty$.

2. Graphiquement, on peut conjecturer que :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;
☐ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$;
☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

3. Soient k une fonction à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = 3$, u la fonction définie par $u(x) = \sqrt{k(x)+1}$ et $\mathscr{C}_u$ la courbe représentative de u dans un repère orthogonal du plan. On peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$;

☐ $\mathscr{C}_u$ admet une asymptote verticale ;

☐ $\mathscr{C}_u$ admet une asymptote horizontale.

4. p est une fonction dont la courbe représentative admet pour asymptotes les droites d'équations $x = -1$ et $y = 3$. Des expressions suivantes, laquelle peut correspondre à $p(x)$?

☐ $\dfrac{3x^2}{x+1}$;

☐ $\dfrac{3x^2}{x^2+1}$;

☐ $\dfrac{3x^2}{(x+1)^2}$.

5. Si g est une fonction telle que $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} g(x) = -\infty$ alors sa courbe représentative :

☐ admet une asymptote horizontale d'équation $y = -2$;

☐ admet une asymptote verticale d'équation $x = -2$;

☐ n' admet pas d'asymptote.

6. Si q est une fonction telle que, pour tout réel strictement positif x, $3 + \dfrac{1}{x} < q(x) < 3 + \dfrac{2}{x}$ alors :

☐ q a une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 0$;

☐ q a une limite en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x) = 3$;

☐ on ne peut rien dire concernant le comportement de q en $+\infty$.

7. Avec la même fonction qu'à la question précédente, on peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} q(x) = 0\,;$ ☐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} q(x) = 3\,;$ ☐ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} q(x) = +\infty.$

8. Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, alors on peut dire que :

☐ f est croissante sur $\mathbb{R}$; ☐ la courbe de f admet deux asymptotes horizontales ; ☐ la courbe de f n'admet pas d'asymptote verticale.

9. Avec la même fonction qu'à la question précédente, on peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x^2) = 0\,;$ ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x} \times f(x) = 0\,;$ ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) + 4}{f(x)} = 1.$

10. Toujours avec la même fonction qu'à la question précédente, on peut affirmer que :

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - f(x))^3 = 0\,;$ ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(1 - x) = 1\,;$ ☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty.$