MATHEMATIQUES
Limites de fonctions : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

Partie A : étude de fonction

1. Calcul de la limite en $-\infty$.

Pour tout réel x on a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$.

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$,
Donc, par produit $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x \times e^{-1} = 0$,
et par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x \times e^{-1} + 1 = 1$

Astuce

Faites apparaître la limite de référence $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$.

2. On a $f(x) = xe^x \times e^{-1} + 1$, et, par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Remarque

Il n'y a aucune forme indéterminée ici. Produit et somme permettent de conclure.

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{1}_{u'(x)}\underbrace{e^{x-1}}_{v(x)} + \underbrace{x}_{u(x)} \times \underbrace{1 \times e^{x-1}}_{v'(x)} + 0 \\ &= (x+1)e^{x-1} \end{aligned}$$

Remarques

- La dérivée d'une constante est nulle.
- $(e^u)' = u'e^u$.
- Toujours factoriser.

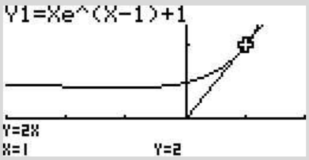
4. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, on en déduit donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	
e^{x-1}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B : recherche d'une tangente particulière

Calculatrice

En traçant la courbe représentative de la fonction f sur un écran de calculatrice, on conjecture que la tangente cherchée existe bien et que c'est au point d'abscisse 1.



1. La tangente T_a a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$, c'est-à-dire :

$$y = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(x-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1.$$

2. Soit $a > 0$, alors :

$$\begin{aligned} O(0\ ;\ 0) \in T_a &\iff 0 = (a+1)\mathrm{e}^{a-1}(0-a) + a\mathrm{e}^{a-1} + 1 \\ &\iff 0 = \mathrm{e}^{a-1}(-a^2 - a + a) + 1 \\ &\iff 1 - a^2\mathrm{e}^{a-1} = 0. \end{aligned}$$

Point sur une droite

Un point (ici le point O) est sur une droite (ici la tangente T_a) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite.

3. Solution de l'équation.

- 1 est une solution de l'équation considérée car $1 - 1^2\mathrm{e}^{1-1} = 1 - 1 = 0$.

Pas évident

Nous n'avons pas encore répondu à la question, puisqu'il faut encore montrer l'unicité de cette solution.
Or la résolution par le calcul de cette équation est impossible, on pense donc au TVI.

- Montrons maintenant que cette équation n'admet qu'une unique solution sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
Posons, pour tout $x > 0$, $g(x) = 1 - x^2\mathrm{e}^{x-1}$. La fonction g est alors dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et :

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \underbrace{-2x}_{u'(x)}\underbrace{\mathrm{e}^{x-1}}_{v(x)} - \underbrace{x^2}_{u(x)} \times \underbrace{1\mathrm{e}^{x-1}}_{v'(x)} \\
&= (-2x - x^2)\mathrm{e}^{x-1} \\
&= -x(2+x)\mathrm{e}^{x-1}
\end{aligned}
$$

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

On en déduit le tableau de variations de g sur $]0\ ;\ +\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
$-x$	‖			$-$	
$2+x$	‖			$+$	
e^{x-1}	‖			$+$	
$g'(x)$	‖			$-$	
$g(x)$	‖ 1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Conclusion : sur $]0\ ;\ +\infty[$, $g(x) = 0 \iff x = 1$.

4. La tangente cherchée est T_1, elle a pour équation $y = 2(x-1)+2$, c'est-à-dire :

$$y = 2x$$

Exercice 2

Partie A

1. a. Variations de la fonction g.
g est une fonction polynôme, elle est donc dériavable sur $\mathbb{R}$, et :

$$g'(x) = -6x^2 + 2x = 2x(-3x+1)$$

Evidemment

On peut aussi utiliser la règle des signes d'un polynôme du second degré (strictement négatif pour toutes les valeurs de x, sauf celles qui sont comprises entre les deux racines).

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+1$		$+$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	$-\frac{26}{27}$	$\searrow$	

b. Limites de la fonction g en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} -2x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 - 1 = +\infty \end{array}\right\} \text{ Par somme, } \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 + x^2 - 1 = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.

On a :

$$g(x) = -2x^3\left(1 + \frac{x^2}{-2x^3} - \frac{1}{-2x^3}\right) = -2x^3\left(1 + \frac{1}{-2x} + \frac{1}{2x^3}\right).$$

Toujours pareil

Pour les limites à l'infini des polynômes avec indétermination, mettez le terme de plus haut degré en facteur.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{-2x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^3} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{-2x} + \frac{1}{2x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3 = -\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim\limits_{x \to +\infty} -2x^3\left(1 + \frac{1}{-2x} + \frac{1}{2x^3}\right) = -\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

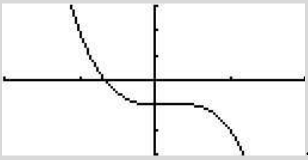
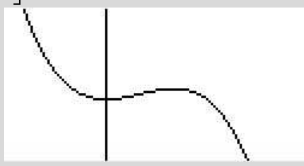
2. $g(0) = -1 < 0$, $g\left(\dfrac{1}{3}\right) = -\dfrac{26}{27} < 0$ et $g(-1) = 2 > 0$

On établit le tableau de variations de la fonction g :

x	$-\infty$	-1	α	0	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	2 ↘	0 ↘	-1 ↗	$-\frac{26}{27}$ ↘	$-\infty$

On a ainsi $-1 < \alpha < 0$.

Calculatrice

Voici la représentation graphique de la fonction g :  Remarquez que sur ce graphique, ce n'est pas évident de voir que la fonction est croissante sur l'intervalle $\left[0 ~;~ \dfrac{1}{3}\right]$ et pourtant.... avec une autre fenêtre d'affichage (je vous laisse chercher laquelle), voilà ce qu'on obtient ..... .

3. Signe de g.

D'après le tableau de variations, $g(x) < 0$ sur $]\alpha ~;~ +\infty[$ et strictement positif sur $]-\infty ~;~ \alpha[$ et s'annule en α.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

Partie B

1. Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

On a $1 + x + x^2 + x^3 = x^3\left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1\right)$.

FI

Par somme on arrive à une forme indéterminée.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} + 1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty \end{array}\right\} \text{ Par produit, } \lim_{x \to -\infty} x^3\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1\right) = -\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. **a.** On multiplie l'inégalité $x > 1$ par x (strictement positif) : $x^2 > x$.
On multiplie cette dernière inégalité par x et on obtient $x^3 > x^2$.

Pour $x > 1$, on a donc : $1 < x < x^2 < x^3$.

b. Pour $x > 1$, on a $1 < x < x^2 < x^3$ donc $0 < \underbrace{1}_{<x^3} + \underbrace{x}_{<x^3} + \underbrace{x^2}_{<x^3} + \underbrace{x^3}_{<x^3} < 4x^3$.

Comme pour tout x, $\mathrm{e}^{-2x+1} > 0$, en multipliant par $\mathrm{e}^{-2x+1} > 0$ dans chaque membre, l'inégalité $0 < 1 + x + x^2 + x^3 < 4x^3$ devient :

$$0 < \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \mathrm{e}^{-2x+1} < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$$

ou autrement dit :

$$0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$$

c. On a $\dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x} = \dfrac{\overbrace{\mathrm{e} \times \mathrm{e}^{-2x}}^{\mathrm{e}^{2x+1}} \times 8x^3}{2} = 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$

Mon conseil

Pour démontrer cette égalité, je vous conseille de partir du membre de droite (pour arriver au membre de gauche.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty \\ \\ \lim\limits_{X \to +\infty} X^3\mathrm{e}^X = 0 \text{ résultat admis dans l'énoncé} \end{array}\right\} \text{Par composition, } \lim\limits_{x \to +\infty} (2x)^3\mathrm{e}^{2x} = 0$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{2}(2x)^3\mathrm{e}^{-2x} = 0$.

Compte tenu de l'égalité précédemment démontrée, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0$.

d. D'après la question précédente, si $x > 1$, alors $0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$.
Si x tend vers $+\infty$, on peut supposer que $x > 1$ donc l'inégalité $0 < f(x) < 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1}$ est vérifiée.
On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3\mathrm{e}^{-2x+1} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
On en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{\left(1 + 2x + 3x^2\right)}_{u'(x)} \underbrace{\mathrm{e}^{-2x+1}}_{v(x)}) + \underbrace{\left(1 + x + x^2 + x^3\right)}_{u(x)} \underbrace{(-2)\mathrm{e}^{-2x+1}}_{v'(x)} \\ &= \left(1 + 2x + 3x^2 - 2 - 2x - 2x^2 - 2x^3\right) \mathrm{e}^{-2x+1} \\ &= \left(-2x^3 + x^2 - 1\right) \mathrm{e}^{-2x+1} \\ &= g(x)\mathrm{e}^{-2x+1} \end{aligned}$$

4. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-2x+1} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

Donc : sur $]-\infty\,, \alpha[$, $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,, \alpha[$;

sur $]\alpha\,, +\infty[$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[\alpha\,, +\infty[$.