MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement 3 (corrigé)

Exercice 1

1. On cherche la limite de la fonction f en 0 :

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\ln(x)\right)^2 = +\infty$.

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \left(\ln(x)\right)^2 = +\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0^+\end{array}\right\} \text{ Par quotient, } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{\left(\ln(x)\right)^2}{x} = +\infty \text{ et donc } \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$$

On en déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

2. a. Démonstration d'une égalité.

Pour $x > 0$, $\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\ln(x)\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\ln(x)\right)^2$.

Propriété du ln

On sait que pour tout $a > 0$, $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$.

On a donc pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned}4\left(\frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\right)^2 &= 4\frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\\ &= 4\times\frac{\frac{1}{4}(\ln(x))^2}{x}\\ &= 4\times\frac{1}{4}\left(\ln(x)\right)^2\times\frac{1}{x}\\ &= \frac{\left(\ln(x)\right)^2}{x}\\ &= f(x)\end{aligned}$$

b. En utilisant cette écriture de $f(x)$, on cherche la limite de $f(x)$ en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty\\ \text{On pose } X = \sqrt{x}\\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln(X)}{X} = 0\end{array}\right\} \text{ Par composition } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

On en déduit que l'axe des abscisses est une asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de $+\infty$.

3. a. f est de la forme d'un quotient $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = (\ln(x))^2$ et $v(x) = x$.

Pour tout x de $]0\ ;\ +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{2\times\frac{1}{x}\times\ln(x)}^{\substack{\text{Dérivée de}\\ x\mapsto(\ln x)^2}}\times\overbrace{x}^{v(x)} - \overbrace{\left(\ln(x)\right)^2}^{u(x)}\times\overbrace{1}^{v'(x)}}{x^2} \\ &= \frac{2\ln(x)-(\ln(x))^2}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)\big(2-\ln(x)\big)}{x^2} \end{aligned}$$

b. On étudie le signe de $f'(x)$ au moyen d'un tableau.
Pour déterminer le signe de $2-\ln(x)$, on résout (par exemple) l'inéquation : $2-\ln(x)\geqslant 0$.

$$\begin{aligned} 2-\ln(x) &\geqslant 0 \\ -\ln(x) &\geqslant -2 \\ \ln(x) &\leqslant 2 \\ \ln(x) &\leqslant \ln(\mathrm{e}^2) \\ x &\leqslant \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-\ln(x)$	$\Vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
x^2	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)=\dfrac{\ln(x)\,(2-\ln(x))}{x^2}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

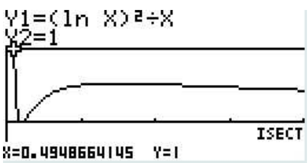
c. $f(1)=\dfrac{\left(\ln(1)\right)^2}{1}=0$ et $f\left(\mathrm{e}^2\right)=\dfrac{\left(\ln\left(\mathrm{e}^2\right)\right)^2}{\mathrm{e}^2}=\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}\approx 0,54<1$
On obtient alors le tableau de variations ci-dessous, que l'on complète :

x	0	α	1	e^2	$+\infty$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$ ↘	1 ↘	0 ↗	$\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}<1$ ↘	0

4. D'après le tableau de variations de f, l'équation $f(x)=1$ n'a pas de solution sur $[1\ ;\ +\infty[$ car le minimum de f sur cet intervalle est $\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}<1$.

Sur $]0\ ;\ 1]$:
- f est continue ;
- f est strictement décroissante ;
- $1\in[0\ ;\ +\infty[$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ 1]$.

Comme elle n'en a pas sur $[1\ ;\ +\infty[$, on en déduit que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$.



Calculatrice

On trace la courbe représentant f et la droite d'équation $y=1$, puis avec le solveur graphique on trouve l'abscisse du point d'intersection : $0,49<\alpha<0,50$.

Exercice 2

1. La largeur de l'arc de chaînette est égal à $2x$ et sa hauteur est égale à $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2)$.

Le problème étudié revient à résoudre l'équation $\dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2)=2x$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2) &= 2x\\ \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2 &= 4x \quad \text{On multiplie par 2 chacun des membres.}\\ \mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2-4x &= 0\end{aligned}$$

a. Pour $x>0$, $x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-4\right)+\mathrm{e}^{-x}-2=\cancel{x}\times\dfrac{\mathrm{e}^x}{\cancel{x}}-4x+\mathrm{e}^{-x}-2=f(x)$

Donc $f(x)$ peut bien s'écrire sous la forme proposée.

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$ par croissance comparée et par somme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-4\right)=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-4\right)=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}x=+\infty\end{array}\right\}\ \text{Par produit, } \lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-4\right)=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-4\right)=+\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}(\mathrm{e}^{-x}-2)=-2 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0\end{array}\right\}\ \text{Par somme, } \lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x}-4\right)+\mathrm{e}^{-x}-2=+\infty$$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. a. f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \overbrace{\mathrm{e}^x}^{\substack{\text{Dérivée de}\\ x\mapsto\mathrm{e}^x}}+\overbrace{(-1)\mathrm{e}^{-x}}^{\substack{\text{Dérivée de}\\ x\mapsto\mathrm{e}^{-x}}}\ \overbrace{-4}^{\substack{\text{Dérivée de}\\ x\mapsto -4x-2}}\\ &= \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-4\end{aligned}$$

b. Démonstration d'une équivalence.

$$\begin{aligned}f'(x)=0 &\iff \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-4=0\\ &\iff \mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^x}-4=0\\ &\iff \frac{(\mathrm{e}^x)^2-1-4\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}=0\\ &\iff (\mathrm{e}^x)^2-4\mathrm{e}^x-1=0\end{aligned}$$

c. Si on pose $X=\mathrm{e}^x$ alors $(\mathrm{e}^x)^2-4\mathrm{e}^x-1=0 \iff X^2-4X-1=0$

$\Delta=16-4\times1\times(-1)=16+4=20>0$ donc l'équation admet deux solutions :

$X_1=\dfrac{4-\sqrt{20}}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}\approx-0,24<0$ et $X_2=2+\sqrt{5}\approx4,24>0$

$\mathrm{e}^x=2-\sqrt{5}<0$ n'a pas de solution car $\mathrm{e}^x>0$.

$\mathrm{e}^x=2+\sqrt{5} \iff x=\ln(2+\sqrt{5})$.

Donc $f'(x)$ s'annule pour une seule valeur égale à $\ln(2+\sqrt{5})$

3. **a.** $f(0) = 1 + 1 - 0 - 2 = 0$

et $f\left(\ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right) \approx -3,3$.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\ln(2+\sqrt{5})$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\ln(2+\sqrt{5}))$	$\nearrow$	$+\infty$

b. — Sur $\left]0\,;\,\ln(2+\sqrt{5})\right]$, $f(x) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.

— Sur $\left[\ln(2+\sqrt{5}\,;\,+\infty\right[$, f est continue et strictement croissante.

$0 \in \left[f(\ln(2+\sqrt{5}))\,;\,\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$ car $f(\ln(2+\sqrt{5})) \approx -3,3 < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive α.

4. **a.**

m	a	b	$b-a$	$f(m)$
	2	3	1	
$2,5$	2	$2,5$	$0,5 > 0,1$	$\approx 0,26 > 0$
$2,25$	$2,25$	$2,5$	$0,25 > 0,1$	$\approx -1,4 < 0$
$2,375$	$2,375$	$2,5$	$0,125 > 0,1$	$\approx -0,66 < 0$
$2,4375$	$2,4375$	$2,5$	$0,0625 < 0,1$	$\approx -0,22 < 0$

b. Grâce à cet algorithme, on obtient un encadrement de α : $\boxed{2,4375 < \alpha < 2,5}$

5. $\mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\dfrac{t}{39} - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$ avec $x = \dfrac{t}{39}$

Cette équation a une unique solution α et $\alpha = \dfrac{t}{39} \iff t = 39\alpha$ donc la hauteur de l'arche est $2t = 78\alpha$

$2,4375 < \alpha < 2,5 \iff 190,125 < 78\alpha < 195$

donc la hauteur de l'arche est comprise entre 190 et 195 mètres.