MATHEMATIQUES
Fonction logarithme népérien : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	‖		$+$		
Variations de ln	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

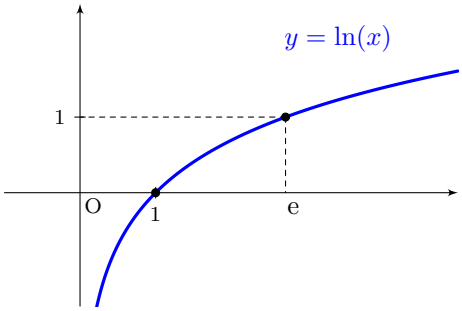

Tableau de signes de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Exercice 2

Propriétés

Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \quad ; \quad \ln\left(x^n\right) = n\ln(x) \quad ; \quad \ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

1. $\mathrm{A} = \ln\left(\mathrm{e}^{-3}\right) + \mathrm{e}^{-\ln(2)} = -3 + \mathrm{e}^{\ln(\frac{1}{2})} = -3 + 0,5 = -2,5.$

$\mathrm{B} = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{\ln\left(\mathrm{e}^2\right)} - \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{\ln(\mathrm{e})}{2\ln(e)} - (-\ln(\mathrm{e})) = \dfrac{1}{2} + 1 = 1,5.$

$\mathrm{C} = \ln(16) - 7\ln(2) + 4\ln(32) + 3\ln\left(\dfrac{1}{8}\right) = 4\ln(2) - 7\ln(2) + 4 \times 5\ln(2) - 3 \times 3\ln(2) = 12\ln(2).$

$\mathrm{D} = 4\ln(125) - 6\ln(25) + 2\ln\left(\dfrac{1}{5}\right) = 4 \times 3\ln(5) - 6 \times 2\ln(5) - 2\ln(5) = -2\ln(5).$

2. $\mathrm{E} = \ln(100) = \ln\left(2^2 \times 5^2\right) = 2\ln(2) + 2\ln(5)$ $\qquad$ $\mathrm{F} = \ln\left(\sqrt{10}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2 \times 5) = \dfrac{1}{2}\ln(2) + \dfrac{1}{2}\ln(5).$

$\mathrm{G} = \ln(0{,}02) = \ln\left(\dfrac{2}{100}\right) = \ln(2) - (2\ln(2) + 2\ln(5)) = -\ln(2) - 2\ln(5).$

$\mathrm{H} = \ln(80\mathrm{e}) = \ln(16 \times 5 \times \mathrm{e}) = 4\ln(2) + \ln(5) + 1.$

Exercice 3

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -4x = 0\end{array}\right\}$ Par somme, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x - 4x = -\infty$

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} -4x = -\infty\end{array}\right\}$ Par somme, on obtient une F.I. du type « $\infty - \infty$ ».

  En factorisant par x, on trouve : $\lim\limits_{x\to +\infty} 2\ln(x) - 4x = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 4\right)$.

  A connaître

  Limite à connaître : $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Pensez que $\ln x$ part à l'infini mais très doucement, contrairement à x. Donc, on divise quelque chose de très petit par quelque chose de très grand.

  Or $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 4\right) = -4 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\}$ Par produit $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 4\right) = -\infty$.

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$.

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{X\to 1} \ln X = 0\end{array}\right\}$ Par composition, $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2 - 2x + 1\right) = 0$

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 0$

  $x^2 - 2x + 1 = x^2\left(1 - \dfrac{2x}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}\right) = x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ Par produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = +\infty$

  Donc $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty$.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln X = +\infty\end{array}\right\}$ Par composition, $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x^2 - 2x + 1) = +\infty$.

  Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty$

- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1\end{array}\right\}$ Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = -\infty$.

  Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = -\infty$.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\end{array}\right\}$ On obtient une F.I. du type « $\dfrac{\infty}{\infty}$ ».

  Indétermination

  Pour lever cette indétermination, on fait apparaître des limites connues :
  $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$.

On a $\dfrac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{\ln(x)}{x} \times \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0 \end{array}\right\} \text{Par produit, } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Donc, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = 0$.

Exercice 4

1. Résolution de l'équation $\left(\mathrm{e}^{2x} - 4\right)\left(2\mathrm{e}^x - 6\right) = 0$

$$\begin{array}{rcl} \left(\mathrm{e}^{2x} - 4\right)\left(2\mathrm{e}^x - 6\right) & = & 0 \\ \mathrm{e}^{2x} - 4 = 0 & \text{ou} & 2\mathrm{e}^x - 6 = 0 \\ \mathrm{e}^{2x} = 4 & \text{ou} & \mathrm{e}^x = 3 \\ \mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{\ln 4} & \text{ou} & \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{\ln 3} \\ 2x = \ln 4 & \text{ou} & x = \ln 3 \quad \text{On utilise } \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y. \\ x = \dfrac{\ln 4}{2} & \text{ou} & x = \ln 3 \end{array}$$

Méthodes

On reconnaît une équation produit nul. On se ramène à des équations du type $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^Y$.

Remarque

On a aussi : $\dfrac{\ln 4}{2} = \dfrac{2\ln 2}{2} = \ln 2$.

2. On résout l'inéquation sur $]-1\,;+\infty[$ car $x+1>0$:

$$\begin{array}{rcl} 1 - 2\ln(x+1) & \geqslant & 5 \\ -2\ln(x+1) & \geqslant & 4 \\ \ln(x+1) & \leqslant & -2 \quad \text{On divise par } -2 \\ \ln(x+1) & \leqslant & \ln(\mathrm{e}^{-2}) \\ x+1 & \leqslant & \mathrm{e}^{-2} \\ x & \leqslant & \mathrm{e}^{-2} - 1 \end{array}$$

Méthode

On se ramène à des inéquations du type $\ln X \leqslant \ln Y$ ou $\ln X \geqslant \ln Y$.

D'où $S = \left]-1\,;\mathrm{e}^{-2} - 1\right]$.

ATTENTION

Attention à l'ensemble de solutions. N'oubliez pas que x doit être strictement supérieur à -1 !

3. Recherche du plus petit entier naturel.

$$\begin{array}{rcll} 12 \times (0,8)^n + 1 & < & 4 & \\ (0,8)^n & < & 0,25 & \\ \ln\left(0,8^n\right) & < & \ln(0,25) & \text{Car la fonction ln est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[. \\ n\ln(0,8) & < & \ln(0,25) & \text{Car } \ln a^n = n\ln a. \\ n & > & \dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)} & \text{Car } \ln 0,8 < 0. \end{array}$$

D'ou $n = 7$ car $\dfrac{\ln(0,25)}{\ln(0,8)} \simeq 6{,}21$.

4. On résout l'équation pour $x > 0$ et $x > 3$ donc sur $]3\,;+\infty[$:

$$\begin{aligned}
\ln(x)+\ln(x-3) &= 2\ln(2)\\
\ln(x(x-3)) &= \ln(2^2) \quad \text{Car } \ln x+\ln y=\ln(xy).\\
\ln(x^2-3x) &= \ln(4)\\
x^2-3x &= 4\\
x^2-3x-4 &= 0
\end{aligned}$$

Toujours pareil

On se ramène à une équation du type : $\ln X = \ln Y$.

$\Delta = (-3)^2 - 4\times 1\times(-4) = 25 > 0$. $x_1 = \dfrac{3-5}{2} = -1 < 3$ et $x_2 = \dfrac{3+5}{2} = 4 > 3$.
L'équation $\ln(x)+\ln(x-3) = 2\ln(2)$ admet qu'une seule solution : $x = 4$.

Exercice 5

a. La fonction f est une somme de fonctions définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$ donc f est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Son premier terme est de la forme $u\times v$ avec $u(x) = x^2$, de dérivée $u'(x) = 2x$ et $v(x) = \ln(x)$, de dérivée $v'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \overbrace{2x}^{u'(x)}\times\overbrace{\ln(x)}^{v(x)}+\overbrace{x^2}^{u(x)}\times\overbrace{\frac{1}{x}}^{v'(x)}+3\\
&= 2x\ln x + x + 3 \quad \text{Car } x^2\times\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x} = x.\\
&= x\,(2\ln(x)+1)+3
\end{aligned}$$

b. La fonction g est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ car elle est de la forme u^2 avec $u(x) = \ln(x)$ (u est dérivable sur $]0\,;+\infty[$), de dérivée $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2u'(x)u(x) = 2\times\dfrac{1}{x}\ln(x) = \dfrac{2\ln(x)}{x}$.

c. La fonction h est définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ comme quotient de deux fonctions définies et dérivables sur $]0\,;+\infty[$ avec un dénominateur non nul sur cet intervalle.
h est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = \ln(x)$, de dérivée $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = x$, de dérivée $v'(x) = 1$.
Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{u'(x)}\times\overbrace{x}^{v(x)}-\overbrace{\ln(x)}^{u(x)}\times\overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{x^2}_{(v(x))^2}}\\
&= \frac{1-\ln(x)}{x}
\end{aligned}$$

Pensez-y !

$\dfrac{1}{x}\times x = \dfrac{x}{x} = 1$.

d. La fonction k est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = 3x^2-2x+1$.
Or pour tout $x\in\mathbb{R}$, $u(x) > 0$ car $\Delta = (-2)^2 - 4\times 3\times 1 = -8 < 0$.
On en déduit que la fonction k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $k'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{6x-2}{3x^2-2x+1}$.