MATHEMATIQUES

Somme de variables aléatoires : entraînement (corrigé)

Exercice 1

1. Le QCM est la répétition de cinq expériences aléatoires identiques et indépendantes. Chacune de ces expérience admet deux issues : succès (bonne réponse) et échec (mauvaise réponse). La probabilité de succès est 0,5.

J est la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses justes sur les cinq questions. On en déduit que J suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,5$.
$E(J) = 5 \times 0,5 = 2,5$.

Loi binomiale

Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant 5$, on a :

$$p(J = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

De plus, si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a $E(X) = n \times p$.

2. a. Les valeurs prises par N sont :

$$10 \ ; \ 7 \ ; \ 4 \ ; \ 1 \ ; \ -2 \ ; \ -5$$

L'idée

On commence par compter le nombre de points si toutes les réponses sont correctes (10 points), puis si il y a une erreur (7 points), ...
Attention la note peut être négative.

b. $N = 2 \times J - 1 \times (5 - J)$.

Ainsi, $N = 3J - 5$.

On en déduit :

$$E(N) = E(3J - 5) = 3E(J) - 5 = 3 \times 2,5 - 5 = 2,5$$

Explication

Le nombre de bonnes réponses est J et il y a deux points par bonne réponse donc $2 \times J$ compte le nombre de points pour les bonnes réponses puis il faut retrancher les points pour les mauvaises réponses. Il y a $5 - J$ mauvaise réponses et et il y a 1 point de retrancher par mauvaise réponse, donc $1 \times (5 - J)$. Ensuite, on réduit l'écriture.

c. La méthode de la réponse au hasard permet d'espérer en moyenne une note de 2,5.
On peut obtenir 10 points si l'on répond correctement à toutes les questions. Cette stratégie n'est pas terrible.

Exercice 2

1. $\Omega = \{(1;1) \ ; \ (1;2) \ ; \ \dots \ ; \ (6;6)\}$.

$$S : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_i \ ; \ y_i) \longmapsto X((x_i \ ; \ y_i)) = x_i + y_i \end{cases}$$

$S(\Omega) = \{2 \ ; \ 3 \ ; \ \dots \ ; \ 12\}$

$$\Pi : \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_i \ ; \ y_i) \longmapsto X((x_i \ ; \ y_i)) = x_i \times y_i \end{cases}$$

$\Pi(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36\}$

L'événement $(S = 2)$ se réalise une seule fois lorsqu'on obtient le couple $(1 \ ; \ 1)$. Ainsi, $P(S = 2) = \dfrac{1}{36}$.

L'événement $(\Pi = 3)$ se réalise deux fois avec les couples $(1 \ ; \ 3)$ et $(3 \ ; \ 1)$. Ainsi, $P(\Pi = 3) = \dfrac{2}{36}$.

Cependant, $(S = 2) \cap (\Pi = 3)$ n'est jamais réalisé : sa probabilité est donc nulle alors que :

$$P(S = 2) \times P(\Pi = 3) = \frac{2}{36^2}$$

2. S et Π ne sont donc pas indépendantes.

Exercice 3

Explication

Il s'agit de bien regarder dans les tableaux les couples permettant d'obtenir un périmètre de 44 cm exactement. Je ne rappelle pas le périmètre d'un rectangle !

On a :

$E = ((L = 13,9) \cap (\ell = 8,1)) \cup ((L = 14) \cap (\ell = 8)) \cup ((L = 14,1) \cap (\ell = 7,9))$

E est la réunion de trois événements disjoints et par l'hypothèse d'indépendance :

$P(E) = P(L = 13,9) \times P(\ell = 8,1) + P(L = 14) \times P(\ell = 8) + P(L = 14,1) \times P(\ell = 7,9)$

$P(E) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{13}{24}$.

Exercice 4

1. Les variables aléatoires X_i suivent une même loi de Bernoulli. Elles sont toutes indépendantes donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et de probabilité de succès p.
. On a donc :

$$P(X = k) = \binom{40}{k} p^k (1 - p)^{40-k}$$

2. $p = \dfrac{1}{20}$.

a. On a $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=40} E(X_i) = np = 40 \times \frac{1}{20} = 2$.

b. $P(X = 0) = \dbinom{40}{0} \left(\dfrac{1}{20}\right)^0 \left(1 - \dfrac{1}{20}\right)^{40} = \left(\dfrac{19}{20}\right)^{40}$.

$P(X = 1) = \dbinom{40}{1} \left(\dfrac{1}{20}\right)^1 \left(1 - \dfrac{1}{20}\right)^{39} = 40 \times \dfrac{1}{20} \left(\dfrac{19}{20}\right)^{39} = 2 \times \left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}$.

$P(X = 2) = \dbinom{40}{2} \left(\dfrac{1}{20}\right)^2 \left(1 - \dfrac{1}{20}\right)^{38} = 20 \times 39 \times \dfrac{1}{400} \left(\dfrac{19}{20}\right)^{38} = \dfrac{39}{20} \times \left(\dfrac{19}{20}\right)^{39}$.

c. La probabilité d'être contrôlé au plus deux fois est :

$$P(X \leqslant 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,6767(3)$$

3. S'il ne fait pas prendre, le fraudeur gagne 400 € (2 trajets par jours à 10 € le trajet pendant 20 jours), mais s'il se fait prendre i fois (avec $0 \leqslant i \leqslant 40$), il devra débourser $100 \times i$ €. On a donc $Z = 400 - 100X$.
Avec $p = \dfrac{1}{5}$, on a $E(Z) = E(400 - 100X) = 400 - 100E(X) = 400 - 100 \left(40 \times \dfrac{1}{5}\right) = -400$. En moyenne sur 40 trajets il devra payer 400 €...

4. a. $P(X \leqslant 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$\begin{array}{rcl} P(X \leqslant 2) & = & \dbinom{40}{0}(1-p^{40} + \dbinom{40}{1}p(1-p)^{39} + \dbinom{40}{2}p^2(1-p) \\ & = & (1-p)^{38}\left[(1-p)^2 + 40p(1-p) + 780p^2\right] \\ & = & (1-p)^{38}\left[741p^2 + 38p + 1\right] \end{array}$$

Explication

L'événement $(X \leqslant 2)$ est l'événement contraire de "Nabolos subit au moins trois contrôles" c'est-à-dire $(X \geqslant 3)$. En étudiant sa probabilité, on pourra en déduire ce que l'on souhaite de $P(X \geqslant 3)$ puisque $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2)$.

b. On a :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & 38 \times (-1)(1-x)^{37}\left(741x^2 + 38x + 1\right) + (1-x)^{38}(1482x + 38) \\ & = & (1-x)^{37}\left[38(-741x^2 - 38x - 1) + (1-x)(1482x + 38)\right] \\ & = & (1-x)^{37}\left[-20158x^2 - 1444x - 38 + 1482x + 38 - 1482x^2 - 38x\right] \\ & = & -21640x^2(1-x)^{37} = 21640x^2(x-1)(1-x)^6 \end{array}$$

$f'(x)$ est du signe de $(x-1)$ donc négative sur $[0\,;\,1]$:

x	0	x_0	1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	1	0	0

- f est continue sur $[0\ ;\ 1]$;
- f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$;
- $0,01$ est une valeur intermédiaire entre 0 et 1 ;

D'après le corollaire du théorème du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique x_0 tel que $0 < x_0 < 1$ qui vérifie :

$$f(x_0) = 0,01$$

La calculatrice permet de trouver $\dfrac{19}{100} < x_0 < \dfrac{19+1}{100}$. On a donc $n = 19$.

c. On a $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2)$.

Donc $P(X \geqslant 3) \geqslant 0,99 \iff 1 - P(X \leqslant 2) \geqslant 0,99 \iff P(X \leqslant 2) \leqslant 0,01$.

D'après la question précédente et la décroissance de la fonction f, il faut donc $p \geqslant x_0$.
La plus petite valeur de p est donc x_0.