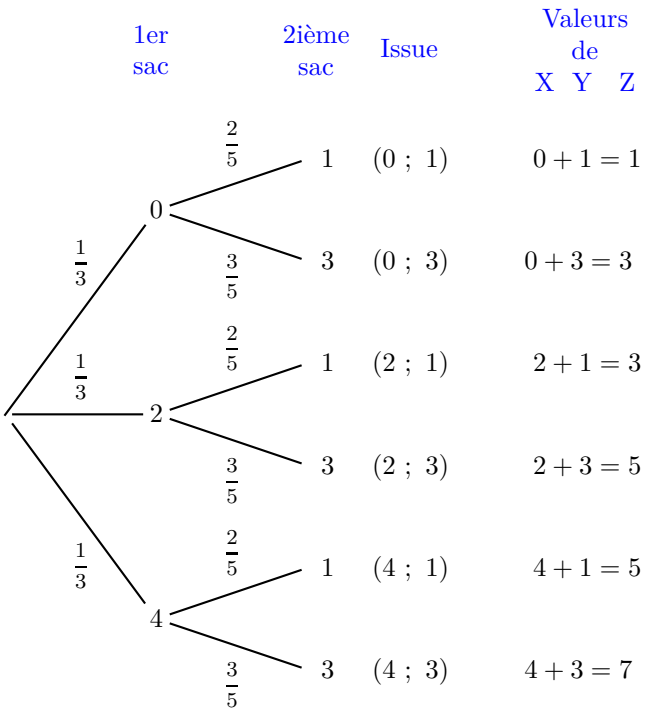
MATHEMATIQUES
Somme de variables aléatoires : entraînement savoir-faire

Exercice 1

1. X est la variable qui donne le numéro tiré dans le premier sac et Y est celle qui donne le numéro tiré dans le second sac.

2. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré. Les valeurs prises par Z sont donc : 1 ; 3 ; 5 et 7.



- $P(Z=1) = P(X=0 \text{ et } Y=1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{15}$.
- $P(Z=3) = P(X=0 \text{ et } Y=3) + P(X=2 \text{ et } Y=1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{3}$.
- $P(Z=5) = P(X=2 \text{ et } Y=3) + P(X=4 \text{ et } Y=1) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{3}$.
- $P(Z=7) = P(X=4 \text{ et } Y=3) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3}{5} = \dfrac{1}{5}$.

On en déduit le tableau donnant la loi de probabilité de Z :

Valeurs z_i prises par Z	1	3	5	7
Probabilités $P(Z=z_i)$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

Exercice 2

X et Y sont des variables aléatoires prenant les valeurs 0 et 1, donc Z prend les valeurs 0, 1 et 2.

De plus, $P(X=0)=\dfrac{3}{5}$ et $P(X=1)=\dfrac{2}{5}$.

Et pour Y ?

$P(Y=0)$ et $P(Y=1)$ dépendent de la nature du tirage (avec ou sans remise).

Méthode

Pour déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $Z=X+Y$ on commence par donner toutes les valeurs (sommes) possibles, c'est-à-dire les valeurs prises par Z, puis pour chacune de ces valeurs, on détermine tous les cas donnant cette valeur. On fait alors la somme de leur probabilité.
Par exemple, pour obtenir $Z=1$, on a :
$(X=1$ et $Y=0)$ ou $(X=0$ et $Y=1)$.
Ainsi,
$P(Z=1)=P(X=1 \text{ et } Y=0)+P(X=0 \text{ et } Y=1)$.

1. Dans le cas d'un tirage avec remise :

$P(Y=0)=\dfrac{3}{5}$ et $P(Y=1)=\dfrac{2}{5}$.

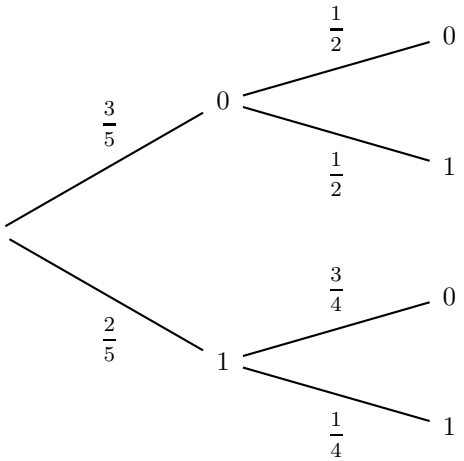
$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(X=0 \text{ et } Y=0) \\ &= P(X=0)\times P(Y=0) \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z=2) &= P(X=1 \text{ et } Y=1) \\ &= P(X=1)\times P(Y=1) \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25} \end{aligned}$$

Valeurs z_i prises par Z	0	1	2
Probabilités $P(Z=z_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P((X=0 \text{ et } Y=1)) \text{ ou } ((X=1 \text{ et } Y=0)) \\ &= P(X=0 \text{ et } Y=1)+P(X=1 \text{ et } Y=0) \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5} \\ &= \frac{12}{25} \end{aligned}$$

2. Dans le cas d'un tirage sans remise :



$P(Y=0)=\dfrac{3}{5}$ et $P(Y=1)=\dfrac{2}{5}$.

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= P(X=0 \text{ et } Y=0) \\ &= P(X=0)\times P_{X=0}(Y=0) \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(Z=2) &= P(X=1 \text{ et } Y=1) \\ &= P(X=1)\times P_{X=1}(Y=1) \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10} \end{aligned}$$

Valeurs z_i prises par Z	0	1	2
Probabilités $P(Z=z_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

$$\begin{aligned} P(Z=1) &= P((X=0 \text{ et } Y=1)) \text{ ou } ((X=1 \text{ et } Y=0)) \\ &= P(X=0 \text{ et } Y=1)+P(X=1 \text{ et } Y=0) \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Exercice 3

1. Le gain algébrique est égal au montant des commissions − les frais.
Comme chaque fauteuil est vendu 200 € et que les frais quotidien s'élèvent à 280 €, le gain journalier est alors donné par :

$$Y=200X-280$$

2. a. Le vendeur est en déficit en fin de journée lorsque $Y<0$.
$Y<0$ est équivalent à $200X-280<0$ soit $X<1,4$.
Cet événement est réalisé lorsque "$X=0$" ou "$X=1$".

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(Y<0) &= P(X=0)+P(X=1) \\ &= 0,1+0,1 \\ &= 0,2 \end{aligned}$$

La probabilité que le vendeur soit en déficit à la fin de la journée est 0,2.

Evénements incompatibles

Les événements $(X=0)$ et $(X=1)$ sont incompatibles (ils ne peuvent pas se produire en même temps). Par conséquent :
$P(Y<0)=P((X=0)\cup(X=1))=P(X=0)+P(X=1)$.

b. Le gain moyen journalier est $E(Y)$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(200X-280) \\ &= 200E(X)-280 \end{aligned}$$

Linéarité de l'espérance

$E(aX+b)=aE(X)+b$

En utilisant le tableau donnant la loi de probabilité de X, on a :

$$E(X)=0\times0,1+1\times0,1+2\times0,15+3\times0,25+4\times0,2+5\times0,2=2,95$$

Ainsi, $E(Y)=200\times2,95-280=310$.
Le vendeur peut espérer gagner en moyenne 310 € par jour.

Exercice 4

- On a $P(X=9)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3}$ et $P(X=-6)=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} E(X) &= 9\times p(X=9)+(-6)\times p(X=-6)\\ &= 9\times\frac{1}{3}+(-6)\times\frac{2}{3}\\ &= -1 \end{aligned}$$

- On a $P(Y=6)=\dfrac{1}{2}$ et $P(Y=-2)=\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} E(Y) &= -2\times p(Y=-2)+6\times p(Y=6)\\ &= -2\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{2}\\ &= 2 \end{aligned}$$

Or $E(S)=E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
Ainsi :

$$E(S)=-1+2=1$$

Le jeu est donc favorable au joueur.
On peut aussi affirmer que si on joue un grand nombre de fois à ce jeu, le gain moyen sera de 1 par partie.

On a :

$$\begin{aligned} V(X) &= E((X-E(X))^2)\\ &= E((X-(-1))^2)\\ &= E((X+1)^2)\\ &= (9+1)^2\times\frac{1}{3}+(-6+1)^2\times\frac{2}{3}\\ &= 100\times\frac{1}{3}+25\times\frac{2}{3}\\ &= 50 \end{aligned}$$

Variance

La variance se calcule aussi par la formule $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$.
$V(X)=9^2\times\dfrac{1}{3}+(-6)^2\times\dfrac{2}{3}-(-1)^2=50$
ou encore :
$V(X)=\sum_{i=1}^{2}p_i(x_i-E(X))^2$

On a aussi :

$$\begin{aligned} V(Y) &= E((Y-E(Y))^2)\\ &= E((Y-2)^2\\ &= (-2-2)^2\times\frac{1}{2}+(6-2)^2\times\frac{1}{2}\\ &= 16\times\frac{1}{2}+16\times\frac{1}{2}\\ &= 8+8\\ &= 16 \end{aligned}$$

Or $V(S)=V(X+Y)=V(X)+V(Y)$, car les deux expériences sont indépendantes.
Donc $V(S)=50+16=66$.

On peut alors en déduire que $\sigma(S)=\sqrt{66}\approx 8,12$

Exercice 5

Pour $k \in \{1; 2; ....; 5\}$, on note X_k la variable aléatoire correspondant au résultat du dé numéro k.
On a alors $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$.
Comme les dés sont équilibrés, toutes ces variables aléatoires suivent la même loi de probabilité.

Valeurs x_i prises par X_k	1	2	3	4	5	6
Probabilités $P(X_k = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- $E(X) = 5 \times E(X_1)$.

$E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + ... + 6 \times \frac{1}{6} = 3,5.$

Ainsi, $E(X) = 5 \times 3,5 = 17,5$.

Espérance et variance

$E(X_1+X_2+...+X_5) = E(X_1)+....+E(X_5) = 5 \times E(X_1)$ car les variables aléatoires X_k sont identiques.
$V(X) = V(X_1 + ... + X_5) = 5 \times V(X_1)$ car les variables aléatoires sont indépendantes.

- Les variables aléatoires X_1, ..., X_6 étant indépendantes et identiquement distribuées, on a : $V(X) = 5V(X_1)$.

$$\begin{aligned} V(X_1) &= \frac{1}{6} \times (1 - 3,5)^2 + \frac{1}{6} \times (2 - 3,5)^2 + ... + \frac{1}{6} \times (6 - 3,5)^2 \\ &= \frac{35}{12} \end{aligned}$$

Par conséquent, $V(X) = 5 \times \frac{35}{12} = \frac{175}{12}$.

Variance

$$V(X) = \sum_{i=1}^{6} p_i (x_i - E(X))^2$$