Chapitre 2

Tableaux croisés et probabilités conditionnelles

I. Tableaux croisés

Il est fréquent d'avoir à étudier simultanément deux caractères dans une population de référence.
On utilise pour cela un tableau croisé d'effectifs dans la plupart des cas.

Définition

Un tableau croisé d'effectifs est un tableau à double-entrées présentant les valeurs du premier caractère en ligne et celles du second caractère en colonne.

- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne, le tableau indique le nombre d'individus présentant simultanément la valeur du premier caractère correspondant à cette ligne et la valeur du second caractère correspondant à cette colonne ;
- On ajoute ensuite une ligne et une colonne « Total » indiquant le nombre d'individus présentant chacune des valeurs du caractère. Ce sont les **effectifs marginaux**.
- À l'intersection de la ligne et de la colonne « Total », on indique l'effectif total, c'est-à-dire le nombre d'individus de la population de référence.

Définition

- la **fréquence marginale** de la valeur d'un caractère est la proportion des individus présentant cette valeur dans la population de référence ;
- **la fréquence conditionnelle** de la valeur a d'un caractère par rapport à la valeur b du second caractère est la proportion des individus présentant également la valeur a parmi tous ceux présentant la valeur b.

II. Quelques rappels de probabilités

1. Vocabulaire

Définition

On appelle **expérience aléatoire** une expérience renouvelable dont on ne peut pas connaître à l'avance le résultat obtenu. Ce résultat n'est pas toujours le même à chaque tentative.
L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de tous les résultats possibles, appelés également éventualités ou issues. Il est noté généralement Ω.

2. Évènement contraire

Définition

On appelle **évènement** A tout sous-ensemble de l'univers Ω, c'est à dire un ensemble constitué de **certains** éléments de Ω. On dit également que l'évènement A est réalisé par ces issues.

Le nombre d'issues qui réalisent l'évènement A est appelé **cardinal** de A. Il est noté $\mathrm{Card}(\mathrm{A})$.

L'**évènement contraire** de A, noté $\overline{\mathrm{A}}$, est constitué de toutes les issues de Ω n'appartenant pas à A.

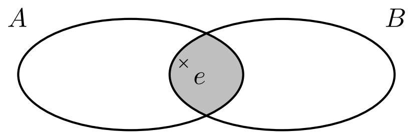
Propriété

Soit p une loi de probabilité sur Ω. On a alors : $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})$.

3. Intersection et réunion de deux évènements

Définition

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire, A et B deux événements de Ω.
L'événement constitué des éventualités appartenant à A **et** à B est noté $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$. (on lit « A inter B »)

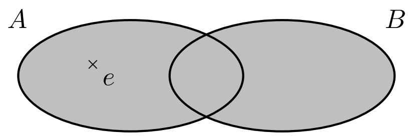


Ainsi $e \in A \cap B$ signifie $e \in A$ **et** $e \in B$.
Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

Remarque : Deux évènements A et B sont dits incompatibles lorsque $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$.

Définition

Soit Ω un univers lié à une expérience aléatoire, A et B deux événements de Ω.
L'événement constitué des éventualités appartenant à A **ou** à B est noté $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. (on lit « A union B »)



Ainsi $e \in A \cup B$ signifie $e \in A$ **ou** $e \in B$.

Remarque : L'intersection des évènements A et B est incluse dans la réunion de A et B.

Propriété

Soit A et B deux événements de Ω et p une loi de probabilité sur Ω.

Alors on a : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

III. Probabilités conditionnelles

Définition

Soit A et B deux évènements tels que $\mathrm{Card}(\mathrm{A}) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant A est la probabilité que l'évènement B soit réalisé sachant que l'évènement A est réalisé. Elle est notée $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$:

$$p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{Card}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{Card}(\mathrm{A})}$$