Chapitre 3

Les suites

I. Généralités sur les suites

Définition

Une suite numérique u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} u \ : \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \ \text{ ou } \ u_n \end{aligned}$$

On note cette suite (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement u.

Remarques :

- L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.
- Une suite est une liste de nombres qui se poursuit : u_0, u_1, u_2, ...
- $u_{1,5}$, u_{-2} n'existent pas ! En revanche $u_0 = -2,5$ est tout à fait possible.
- u_{n+1} est le terme qui suit u_n.

1. Modes de génération d'une suite

Une suite peut être définie de deux manières différentes :

Définition

Une suite u est définie de manière explicite lorsque l'on peut exprimer le terme général u_n en fonction de son indice n.

Remarque : On peut calculer directement n'importe quel terme u_n de la suite en remplaçant n par la valeur souhaitée.

Définition

Une suite u est définie par récurrence quand elle est définie par la donnée :

- de son terme initial, généralement u_0 ;
- d'une relation qui permet de calculer à partir de chaque terme le terme suivant.
  Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Remarque : Pour ce type de suite, on ne peut pas calculer directement n'importe quel terme.
En effet, pour déterminer u_4, on a besoin de u_3 et pour déterminer u_3, on a besoin de u_2, et ainsi de suite de proche en proche.

2. Représentation graphique

Définition

Dans un repère $(\mathrm{O} \ ; \ \vec{\imath}\,, \vec{\jmath}\,)$, la représentation graphique d'une suite u est l'ensemble des points M_n de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.

Remarque : Contrairement à une fonction, la représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.

II. Sens de variation d'une suite

Définition

- Une suite u est croissante si pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$;
- Une suite u est décroissante si pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant u_{n+1}$;
- Une suite u est constante si pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n$;
- Une suite u est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque : Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes.
Par exemple, la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$.

Méthode

Dans la pratique, pour étudier le sens de variation d'une suite u, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

III. Suites arithmétiques et géométriques

1. Suites arithmétiques

Définition

Une suite est dite **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en lui ajoutant un nombre réel constant r, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + r$

Propriété

Une suite est arithmétique si et seulement sa représentation graphique est un nuage de points alignés.
On parle alors de croissance linéaire.

Méthode

Pour prouver qu'une suite u est arithmétique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

Propriété

Soit u une suite arithmétique de raison r.
Si $r > 0$, u est croissante ; si $r < 0$, u est décroissante ; si $r = 0$, u est constante.

2. Suites géométriques

Définition

Une suite est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par un nombre réel constant q, appelé raison de la suite. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} q \times v_n$.

Méthode

Pour prouver qu'une suite v est géométrique, on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la quotient $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ est une constante, c'est-à-dire indépendante de l'entier n.

Propriété

Soit v une suite géométrique de raison q telle que $v_0 > 0$:

- Si $q > 1$, v est croissante ; si $0 < q < 1$, v est décroissante ; si $q = 1$, v est constante.
- Le nuage de points représentant la suite v suit une croissance exponentielle.