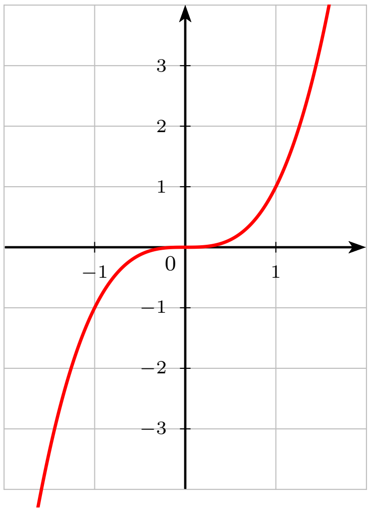
Chapitre 5

Fonctions polynômes de degré 3

I. Quelques rappels

1. La fonction cube



Définition : fonction cube

On appelle **fonction cube**, la fonction qui à un nombre réel associe son cube. En d'autres termes, la fonction cube est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3$

Remarques :
La courbe représentative de la fonction cube a pour équation $y = x^3$.

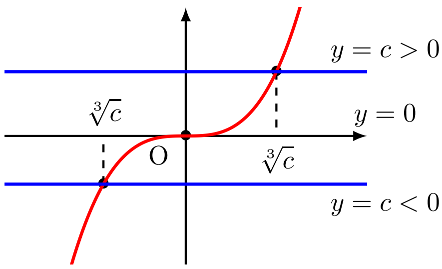
Si le repère est orthogonal, la courbe représentant la fonction cube admet l'origine comme centre de symétrie.
La fonction cube est impaire.

2. Équation de la forme $x^3 = c$

Méthode

Toute équation de la forme $x^3 = c$ admet qu'une seule solution notée :

$$x = \sqrt[3]{c}$$



Remarques :
- La solution de l'équation $x^3 = c$ est l' abscisse du point d'intersection de la courbe d'équation $y = x^3$ et de la droite horizontale d'équation $y = c$;
- Si $c = 0$ alors $x = \sqrt[3]{0} = 0$;
- Le nombre $\sqrt[3]{c}$ est appelé "racine cubique" de c.

II. Fonctions polynômes de degré 3 de la forme $x \longmapsto ax^3 + b$

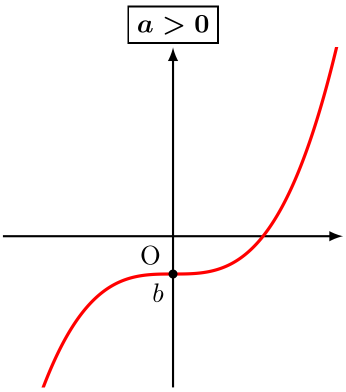
Propriété

Dans un repère orthogonal, toute fonction du type $x \longmapsto ax^3$ est représentée par une courbe qui passe par l'origine O du repère et qui est symétrique par rapport à O.

Propriété

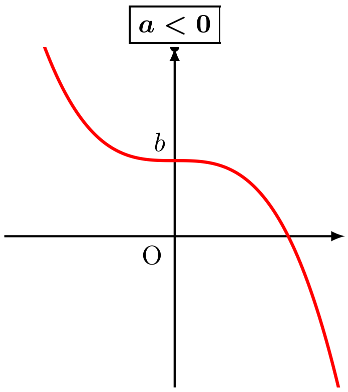
Les courbes représentatives des fonctions du type $x \longmapsto ax^3 + b$ sont similaires à celles de la forme $x \longmapsto ax^3$. Elles ne sont pas symétriques par rapport à O mais sont décalées vers le haut ou le bas, selon le signe de b.

Deux orientations de la courbe d'équation $y = ax^3 + b$ sont possibles suivant le signe du réel a :



x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$ b $\nearrow$

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.



x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$	$\searrow$ b $\searrow$

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

III. Fonctions de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

définition

Toute fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ avec $a \neq 0$ est une fonction polynôme de degré 3. Elle s'annule en x_1, x_2 et x_3 (ce sont les racines du polynôme).

Remarque :

- Si $x_1 \neq x_2 \neq x_3$, la courbe d'équation $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ coupe l'axe des abscisses (Ox) en trois points distincts d'abscisses x_1, x_2 et x_3 ;
- x_1, x_2 et x_3 sont les racines de la fonction polynôme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Deux allures de la courbe sont possibles suivant le signe du réel a :