Chapitre 6

Dérivation

1. Taux de variation

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.
Soit h un réel non nul tel que $a+h \in \mathrm{I}$.

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le rapport (quotient) $t(h)$ défini par :

$$t(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

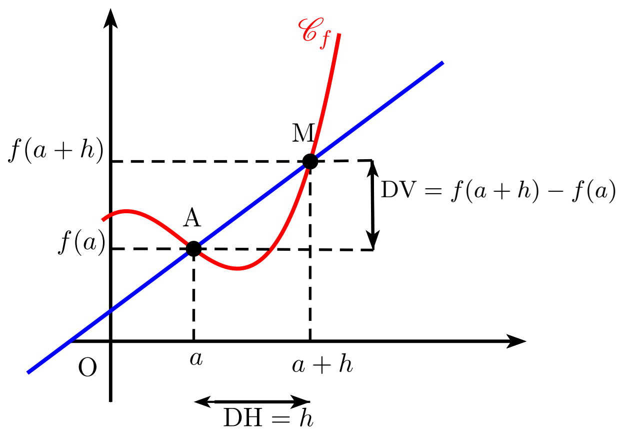
2. Interprétation graphique

Définition

On considère deux points A et M d'une courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et $a+h$.
La droite (AM) est appelée sécante à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Le taux de variation de f entre a et $a+h$ est le coefficient directeur de la sécante (AM) :

$$\frac{\mathrm{DV}}{\mathrm{DH}} = \frac{y_\mathrm{M}-y_\mathrm{A}}{x_\mathrm{M}-x_\mathrm{A}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



I. Nombre dérivé et tangente à une courbe

1. Nombre dérivé

Définition

On dit que f est **dérivable** en a lorsque le taux de variation $t(h)$ admet comme limite un nombre réel quand h tend vers 0.
Ce nombre, noté $f'(a)$ est appelé **nombre dérivé de f** en a.
On a ainsi :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Commentaire

$\lim\limits_{h\to 0} t(h) = \ell$ se lit « limite quand h tend vers 0 de $t(h)$ égale ℓ.
Cela signifie que lorsque le nombre h devient très proche de 0, le nombre $t(h)$ prend des valeurs très voisines de ℓ (aussi proche que l'on veut).

2. Tangente à une courbe

Définition

Soit f une fonction dérivable en a, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a.

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A est la droite passant par A de coefficient directeur $f'(a)$. Son équation réduite est de la forme :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Commentaire

Aux alentours du point A, la tangente est la droite la plus proche de la courbe $\mathscr{C}_f$.

II. Fonction dérivée

1. Lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un un intervalle I.
La fonction qui, à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f.
On la note f'.

Propriétés

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout x de I, on a $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I ;
- Si pour tout x de I, on a $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I ;
- Si pour tout x de I, on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

III. Calcul d'une fonction dérivée

Fonction f	**Dérivée f'**
k (constante)	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

Fonction	**Dérivée**
$f + g$	$f' + g'$
kf (k constante)	kf'

IV. Applications aux fonctions polynômes de degré 2 et 3

Propriétés

- Les fonctions polynômes de degré 2 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$.
- Les fonctions polynômes de degré 3 définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Propriétés

Lorsque la fonction dérivée s'annule et change de signe, la fonction f admet un extremum local.