Chapitre 7

Probabilités : Variables aléatoires

I. Variables aléatoires

1. Définition

Exemple :
Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé à six faces et regarder le résultat obtenu.
L'univers associé à cette expérience est l'ensemble de toutes les issues possibles : Ici $\Omega = \{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\ \ 5\,;\,6\}$

On considère le jeu suivant :
- Si le résultat est pair, on gagne 2 € ;
- Si le résultat est 1, on gagne 3 € ;
- Si le résultat est 3 ou 5, on perd 6 €.

On peut définir ainsi une variable aléatoire X sur Ω qui peut prendre les valeurs 2, 3 ou -6.
Pour les issues 2, 4 ou 6, on a : $X = 2$; pour l'issue 1, on a : $X = 3$ pour les issues 3 et 5, on a : $X = -6$.

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire.

II. Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs x_1, x_2, ..., x_n.
L'évènement « X prend la valeur x_i » est noté $(X = x_i)$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$, on dit que l'on définit une variable aléatoire.
On présente généralement la loi de probabilité d'une variable aléatoire dans un tableau.

Remarque : La somme de toutes les probabilités du tableau est égale à 1.

III. Espérance d'une variable aléatoire

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec des des probabilités respectives p_1, p_2, ..., p_n.

Définition

L'espérance de X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = p_1 \times p_1 + p_2 \times x_2 + ... + p_n \times x_n$$

Remarque : L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

IV. Répétition d'expériences identiques et indépendantes

Définition

On dit que deux expériences aléatoires sont **indépendantes** lorsque les résultats de l'une n'influencent pas les probabilités de l'autre.

Règle d'utilisation d'un arbre pondéré

• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud vaut 1.

• La probabilité d'une issue représentée par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.

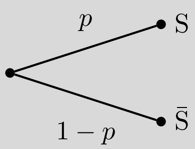
• La probabilité d'un événement T est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de T.

V. Loi de Bernoulli

Définition

On appelle **épreuve de Bernoulli** de paramètre p, toute expérience aléatoire admettant exactement deux issues :

- l'une appelée « succès » notée S, dont la probabilité est $p(\mathrm{S}) = p$;
- l'autre appelée « échec » notée $\bar{\mathrm{S}}$, dont la probabilité est $p(\bar{\mathrm{S}}) = 1 - p$.



Définition

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et 0 sinon.

La loi de probabilité de X est donnée sous la forme du tableau :

k	0	1
$p(X = k)$	$1-p$	p

On dit que la variable X suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

VI. Répétition d'épreuves aléatoires de Bernoulli

Lorsqu'on répète de façon identique et indépendante des épreuves de Bernoulli, on peut modéliser la situation par un arbre de probabilités.

On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.

La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'echec est $p(\overline{S}) = 1 - p = q$. **issues**