MATHEMATIQUES
E3C : dérivation (1), corrigé

1. a. On a pour tout réel x :

$$f'(x) = -2x + 4$$

> **A savoir**
> Si $u(x) = -x^2$, alors $u'(x) = -2x$ et si $v(x) = 4x$, alors $v'(x) = 4$.

b. La fonction $x \longmapsto -2x + 4$ est une fonction affine qui s'annule en $x = 2$. Le coefficient devant x est négatif (il vaut -2), donc la droite (qui représente f') descend et par suite son signe est "$+$, $-$".

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	

> **Conseil**
> Les variations obtenues doivent être cohérentes avec le graphique. La fonction f est représentée sur l'intervalle $[0\ ;\ 3]$.

$f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = 4$

2. a. On a $f(3) = -3^2 + 4 \times 3 = -9 + 12 = 3$, donc le point A est bien sur la courbe qui représente f.
On a aussi : $g(3) = \dfrac{1}{3} \times 3^2 - 4 \times 3 + 12 = 3$, donc le point A est bien sur la courbe qui représente g.

b. La fonction g' est une fonction affine. On cherche la valeur qui l'annule en résolvant l'équation $g'(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 0 \\
\frac{2}{3}x - 4 &= 0 \\
\frac{2}{3}x &= 4 \\
x &= 4 \div \frac{2}{3} \\
x &= 4 \times \frac{3}{2} \\
x &= 6
\end{aligned}$$

> **A savoir**
> Diviser par $\dfrac{2}{3}$ revient à multiplier par sn inverse soit $\dfrac{3}{2}$.

On en déduit que g' s'annule en 6 et comme le coefficient devant x est positif (c'est $\dfrac{2}{3}$), on en déduit que la droite (qui représente g') monte et par suite son signe est "$-$, $+$".

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

La fonction g est bien décroissante sur $[3\ ;\ 6]$.

c. L'équation réduite d'une tangente au point d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Le point A a pour abscisse $a = 3$.
On a $f'(3) = -2 \times 3 + 4 = -2$ et $f(3) = 3$, d'où $y = -2(x - 3) + 3$.
En développant on obtient comme équation de tangente en $a = 3$ pour la courbe représentant f :

$$y = -2x + 9$$

De la même façon, on a $g'(3) = \dfrac{2}{3} \times 3 - 4 = 2 - 4 = -2$ et $g(3) = 3$, ce qui donne exactement la même équation réduite de droite pour la tangente.
Par conséquent, les deux courbes ont une tangente commune au point d'abscisse 3.