

Les suites

Les savoir-faire du chapitre

- ▶ **1STMG.120** Calculer les termes d'une suite (explicite ou par récurrence).
- ▶ **1STMG.121** Modéliser une situation à l'aide d'une suite.
- ▶ **1STMG.122** Programmer le calcul du terme d'un rang donné.
- ▶ **1STMG.123** Réaliser et exploiter la représentation graphique d'une suite.
- ▶ **1STMG.124** Étudier les variations d'une suite.
- ▶ **1STMG.125** Reconnaître et utiliser une suite arithmétique.
- ▶ **1STMG.126** Reconnaître et utiliser une suite géométrique.



Activité d'introduction

En 2019, Anne et Bernard gagnent mensuellement 1 500€ chacun.

Un patron leur propose deux modes possibles d'augmentation de leur salaire mensuel :

- option A : une hausse fixe du salaire mensuel de 90€ au 1er janvier de chaque année;
- option B : une hausse de 5% du salaire mensuel de l'année précédente au 1er janvier de chaque année.

Anne choisit l'option A et Bernard l'option B.

À partir de quelle année le salaire mensuel de Bernard dépassera-t-il celui d'Anne ?





Généralités sur les suites

1 Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par : $u(n) = 2n - 10$.

Déterminer $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ et $u(12)$.

2 Soit u la suite définie pour tout entier naturel par : $u(n) = 2n^2 - 3$.

Déterminer $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ et $u(10)$.

3 Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par : $u(n) = \frac{4}{n^2 + 1}$.

Déterminer $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$.

4 Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v(0) = 3 \\ v(n+1) = 2v(n) - 1 \end{cases}$

Calculer $v(1)$, $v(2)$ et $v(3)$.

5 Soit w la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} w(0) = 1 \\ w(n+1) = -2w(n) + 3 \end{cases}$

Calculer $w(1)$, $w(2)$ et $w(3)$. Que constate-t-on ?

6 Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} v(1) = 0,5 \\ v(n+1) = 4 - v(n) \end{cases}$

Déterminer $v(2)$, $v(3)$ et $v(4)$.

7 Soit u la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} u(0) = 1 \\ u(n+1) = 0,8u(n) + 2 \end{cases}$

Déterminer, à l'aide de la calculatrice, $u(9)$ et $u(17)$.

On arrondira au centième.

8 On considère la feuille de calcul suivante :

	A	B
1	0	=2*A1+1
2	1	
3	2	
4	3	
5	4	

On saisit la formule `=2*A1+1` dans la cellule **B1**.

- 1) Que permet de calculer cette saisie.
- 2) Quels sont alors les résultats obtenus dans chacune des cellules **B2**, **B3**, **B4** et **B5** ?

9 Soit u la suite définie pour tout entier naturel par :

$$\begin{cases} u(0) = 1 \\ u(n+1) = 3 \times u(n) - 1 \end{cases}$$

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	1
3	1	
4	2	
5	3	

On veut compléter la colonne B par recopie vers le bas.

- 1) Quelle formule doit-on saisir dans la cellule **B3** pour calculer les premiers termes de la suite u ?
- 2) Compléter toute la colonne B.

Programmer avec Python

10 ALGO

On considère l'algorithme écrit en langage Python :

```
from math import *
def u(n):
    u=1
    for i in range n:
        u=2*u+1
    return u
```

Un utilisateur saisit $u(4)$ dans la console.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par la variable i ?
- 2) Que vaut le nombre $u(4)$?

11 ALGO

On considère l'algorithme écrit en langage Python :

```
from math import *
def liste(n):
    u=1
    L=[u]
    for i in range n:
        u=2*u+1
        L=L+[u]
    return L
```

Un utilisateur saisit `liste(5)` dans la console.

- 1) Quelles sont les valeurs prises par la variable i ?
- 2) Quel résultat affiche alors cet algorithme ?



Modéliser à l'aide d'une suite

12 Pour participer à un marathon, Hélène commence son entraînement en parcourant 10 kilomètres la première semaine, puis augmente cette distance de 2 kilomètres chaque semaine.

On note $d(n)$ la distance parcourue par Hélène la n -ième semaine d'entraînement.

- 1) Calculer $d(1)$ puis interpréter ce résultat.
- 2) Exprimer $d(n+1)$ en fonction de $d(n)$.

13 Une tablette tactile affiche une autonomie de 8 heures. Une étude montre que l'autonomie de la batterie baisse de 15 % chaque année d'utilisation.

On modélise le nombre d'heures d'autonomie de cette tablette après n années d'utilisation à l'aide d'une suite.

- 1) Calculer l'autonomie de la batterie après 1 an, puis après 2 ans d'utilisation.
- 2) Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
- 3) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'autonomie de la batterie après 10 ans d'utilisation.
- 4) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre d'années d'utilisation de la tablette tel que son autonomie ne soit plus que de 30 minutes.

14 Le 1^{er} janvier 2018, Louise ouvre un livret d'épargne sur lequel elle dépose 6 000 €. Elle décide de verser 900 € sur ce livret chaque 1^{er} janvier à partir de 2019.

Le taux de rémunération de ce livret est fixé à 2 % par an et les intérêts sont versés sur le livret le 1^{er} janvier de chaque année.

Louise souhaite déterminer le montant dont elle disposera le 1^{er} janvier 2024.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le montant exprimé en euros, disponible sur le livret le 1^{er} janvier de l'année 2018 + n . On a donc $u_0 = 6000$.

- 1) Montrer que $u_1 = 7020$. Que représente ce nombre ?
- 2) Interpréter puis calculer u_2 .
- 3) Montrer que $u_{n+1} = 1,02u_n + 900$ pour tout entier naturel n .
- 4) Avec un tableur, Louise a obtenu $u_5 \simeq 11308,12$ arrondi au centième. Ce nombre correspond-il au montant dont disposera Louise le 1^{er} janvier 2024 ? Sinon déterminer ce montant.

15 Des algues prolifèrent dans un étang. En journée, la masse d'algues augmente de 2 % puis, à la nuit tombée, le propriétaire de l'étang actionne un système de filtration qui retire 100 kg d'algues.

Le propriétaire estime que la masse d'algues dans l'étang au matin de l'installation du système de filtration est de 2 000 kg.

On modélise par $u(n)$ la masse d'algues dans l'étang, exprimée en kg, après utilisation du système de filtration pendant n jours.

- 1) Calculer les termes $u(1)$ et $u(2)$. Interpréter ces nombres.
- 2) Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$.
- 3) Au bout de combien de temps la masse d'algues aura diminué de moitié ?

16 En 2019, une ville comptait 40 000 habitants.

Une étude démographique, a permis d'établir que chaque année, 8 % des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent.

On note u le nombre de milliers d'habitants de cette ville l'année 2019 + n ; on a donc $u(0) = 40$.

- 1) a) Calculer $u(1)$. Interpréter ce résultat.
b) Estimer la population de cette ville en 2021.
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel n :

$$u(n+1) = 0,92 \times u(n) + 4$$

- 3) On considère l'algorithme écrit en Python :

```
from math import*
def seuil(k):
    n=0
    u=40
    while u<=43:
        u=0,92*u+4
        n=n+1
    return(n)
```

- a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats au millièmes près.

n	0	1	...	
u	40		...	
Test $u \leq 43$	Vrai		...	

- b) Quel résultat obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

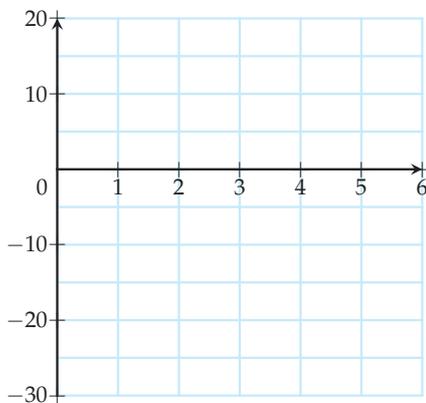


Graphique et sens de variations

17 On considère la suite u définie, pour tout entier n , par :

$$u(n) = -n^2 + 0,5n + 1$$

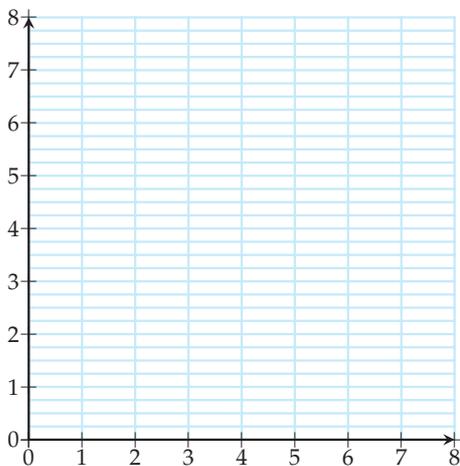
- 1) Représenter cette suite dans le repère ci-dessous.
- 2) Que peut-on en conjecturer sur le sens de variations de la suite u ?
- 3) a) Démontrer que $u(n+1) = -n^2 - 1,5n + 0,5$.
b) Déterminer le signe de $u(n+1) - u(n)$.
Que peut-on en déduire ?



18 On considère la suite v définie par son premier terme $v(0) = 1$ et la relation :

$$v(n+1) = v(n) + 0,25n + 0,25 \text{ pour tout entier } n.$$

- 1) Déterminer les huit premiers termes de la suite v puis réaliser la représentation graphique de ces termes dans le repère ci-dessous.
- 2) a) Conjecturer le sens de variations de la suite v ?
b) Démontrer cette conjecture.



Suites arithmétiques

19 Soit u la suite arithmétique de premier terme 451 et de raison 12.

Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

20 u est une suite arithmétique de premier terme $u(0)$ et de raison r .

Calculer $u(1)$, $u(2)$ et $u(3)$ dans chacun des cas suivants.

- 1) $u(0) = 3$ et $r = 4$.
- 2) $u(0) = 0,4$ et $r = -0,5$.
- 3) $u(0) = 8$ et $r = 0,75$.

21 u est une suite arithmétique.

Calculer $u(0)$ et $u(4)$ dans chacun des cas suivants.

- 1) $u(2) = 25$ et $u(3) = 125$.
- 2) $u(1) = 7$ et $u(3) = 63$.

22 Les suites u ci-dessous sont-elles arithmétiques ?

Si oui, donner le premier terme et la raison.

$$1) \begin{cases} u(0) = 3 \\ u(n+1) = u(n) - 7 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} u(0) = 1 \\ u(n+1) = -u(n) - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} u(0) = -1 \\ u(n+1) - 4 = u(n) \end{cases} \quad 4) \begin{cases} u(0) = 1\,000 \\ u(n+1) = 3u(n) \end{cases}$$

23 Les suites u ci-dessous sont-elles arithmétiques ?

Si oui, donner le premier terme et la raison.

$$1) u(n) = 50 - 3n \quad 2) u(n) = 4n$$

24 Les suites u ci-dessous sont-elles arithmétiques ?

Si oui, donner le premier terme et la raison.

$$1) u(n) = 2n - 1 \quad 2) u(n) = n^2$$

25 En France, à la fin de l'année 2005, on compte 940 éoliennes. Depuis, chaque année, 500 éoliennes supplémentaires ont été installées.

On note, pour tout entier naturel n , $u(n)$ le nombre d'éoliennes installées en France à la fin de l'année 2005 + n . On a donc $u(0) = 940$.

- 1) Exprimer $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$ et en déduire la nature de la suite u .
- 2) A l'aide de la calculatrice, estimer, selon ce modèle, le nombre d'éoliennes en France en 2025.

26 Nabolos souhaite participer à une course cycliste qui aura lieu dans quelques mois. Il commence son entraînement en parcourant 40 km la première semaine, puis prévoit d'augmenter cette distance de 5 km chaque semaine.

On note $u(n)$ la distance, exprimée en kilomètres, parcourue par Nabolos la n -ième semaine d'entraînement. Ainsi, $u(1) = 40$.

- Justifier que u est une suite arithmétique et préciser sa raison.
- A l'aide de la calculatrice, déterminer la distance parcourue par Nabolos la 18^e semaine d'entraînement.

27 On considère la feuille de calcul suivante :

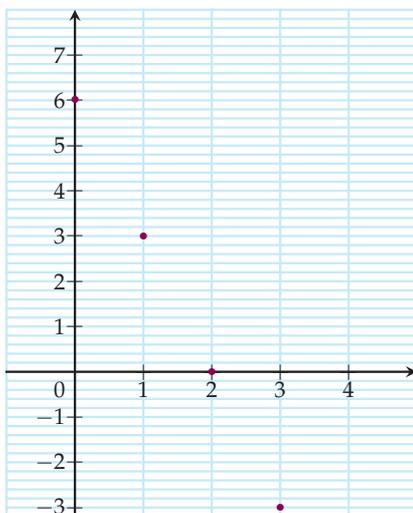
	A	B	C
1	n	$u(n)$	4
2	0	5	
3	1		
4	2		
5	3		

On saisit la formule $=C\$1+B2$ dans la cellule **B3**.

- Que permet de calculer cette saisie.
- Quels sont alors les résultats obtenus dans chacune des cellules **B3**, **B4**, et **B5**?

28 Sur le graphe ci-dessous, on a représenté une suite arithmétique u .

Déterminer son sens de variation, son terme initial u_0 et sa raison.



Suites géométriques

29 Soit v la suite géométrique de premier terme 1 520 et de raison 1,03.

Déterminer les trois premiers termes de cette suite.

30 v est une suite géométrique de premier terme $v(0)$ et de raison q .

Calculer $v(1)$, $v(2)$ et $v(3)$ dans chacun des cas suivants.

- $v(0) = 3$ et $q = 4$.
- $v(0) = 0,4$ et $q = -0,5$.
- $v(0) = 8$ et $q = 0,75$.

31 v est une suite géométrique.

Calculer $v(0)$ et $v(4)$ dans chacun des cas suivants.

- $v(2) = 25$ et $v(3) = 125$.
- $v(1) = 7$ et $v(2) = 63$.

32 Déterminer si les suites u ci-dessous, définies pour tout entier naturel n , sont géométriques.

Si oui, donner la raison.

- $u(n) = 3^n$
- $u(n) = 3n^2$
- $$\begin{cases} u(0) = -1 \\ 5u(n+1) = u(n) \end{cases}$$
- $$\begin{cases} u(0) = 1\,000 \\ u(n+1) = 3u(n) \end{cases}$$

33 On considère une suite géométrique de premier terme $u(0) = 150$ et de raison $q = 0,6$.

On souhaite afficher les termes consécutifs de cette suite dans la colonne **B** du tableur.

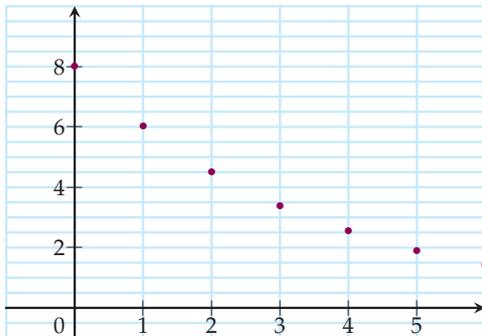
	A	B	C
1	n	$u(n)$	0,6
2	0		
3	1		
4	2		
5	3		

- Quelle valeur doit-on écrire dans la cellule **B2**?
- Quelle formule peut-on rentrer dans la cellule **B3** afin d'obtenir, en la recopiant vers le bas, les termes consécutifs de la suite u ?
- Quels sont les résultats obtenus dans chacune des cellules **B3**, **B4** et **B5**?



34 Sur le graphe ci-dessous, on a représenté une suite géométrique v .

Déterminer son sens de variation, son terme initial $v(0)$ et sa raison q .



35 En 2000, 192 millions de boîtes d'antibiotiques ont été vendues en France.

Un plan national a été engagé en 2001 sur le thème « Les antibiotiques, c'est pas automatique ».

On a constaté que, de 2000 à 2018, le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues en France a baissé chaque année de 2 % par an.

On suppose, dans cet exercice, que la baisse de 2 % par an va se poursuivre jusqu'en 2030.

Pour tout entier naturel n , on note u une estimation du nombre (en millions) de boîtes d'antibiotiques vendues en France pendant l'année $2000 + n$. On a donc $u(0) = 192$.

- 1) Déterminer, selon ce modèle, le nombre de boîtes d'antibiotiques qui ont été vendues en 2001 et 2002.
- 2) Exprimer $u(n + 1)$ en fonction de $u(n)$ et en déduire la nature de la suite u .
- 3) À l'aide de la calculatrice, estimer, selon ce modèle, le nombre de boîtes d'antibiotiques vendues en 2030.

36 Le salaire annuel d'embauche d'un employé est de 21 600 €.

Son contrat prévoit une hausse annuelle de 2,5%. On note $u(0) = 21600$ et pour tout entier naturel n , $u(n)$ est le salaire au bout de n années.

- 1) Calculer $u(1)$.
- 2) Exprimer $u(n + 1)$ en fonction de $u(n)$ et en déduire la nature de la suite u .
- 3) Déterminer à l'aide de la calculatrice :
 - a) le salaire annuel de l'employé au bout de 18 ans ;
 - b) quand aura doublé son salaire ?

Exercice bilan

37 Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1^{er} juin 2019. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000.

Une étude lui permet d'élaborer chaque année un modèle selon lequel :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite u . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , $u(n)$ désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année $2019 + n$. On a donc $u(0) = 3 000$.

- 1) a) Montrer que $u(1) = 2 926$.
b) Justifier que, pour tout entier naturel n : $u(n + 1) = 0,95u(n) + 76$.
- 2) À l'aide d'un tableur, le directeur souhaite calculer le nombre de cétacés les cinq premières années :

	A	B	C	D	E	F
1	n	0				
2	$u(n)$	3000				

- a) Quelle valeur doit-on saisir dans la cellule B2 ?
 - b) Quelle formule peut-on rentrer dans la cellule C2 afin de répondre aux attentes du directeur ?
- 3) On considère l'algorithme écrit en Python :

```

from math import*
def seuil():
    n=0
    u=3000
    while u>=2000:
        u=0,95*u+76
        n=n+1
    return(n)
    
```

Quel résultat obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.