FONCTIONS 4

Les fcts polynômes de degré 2

Les savoir-faire du chapitre

- **1STMG.130** Reconnaître une fonction polynôme du second degré.
- **1STMG.131** Vérifier qu'une valeur est la racine d'un polynôme du second degré.
- **1STMG.132** Associer une fonction à une parabole d'équation $y = ax^2 + b$ ou $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- **1STMG.133** Résoudre une équation de la forme $x^2 = c$.
- **1STMG.134** Caractériser une fonction polynôme du second degré de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.
- **1STMG.135** Factoriser une expression du second degré connaissant au moins une de ses racines.
- **1STMG.136** Déterminer le signe de la fonction de la forme $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$.

Activité d'introduction

Nabolos est embauché comme MNS sur une plage. Il doit délimiter une zone de baignade surveillée avec un cordon de flottaison de 120m de long placé à l'aide de deux piquets en bois à fixer sur le sable et deux bouées à positionner dans l'eau.

Comment doit-il procéder pour obtenir la zone de baignade rectangulaire la plus grande possible ?

S'entraîner

Généralités sur les fonctions

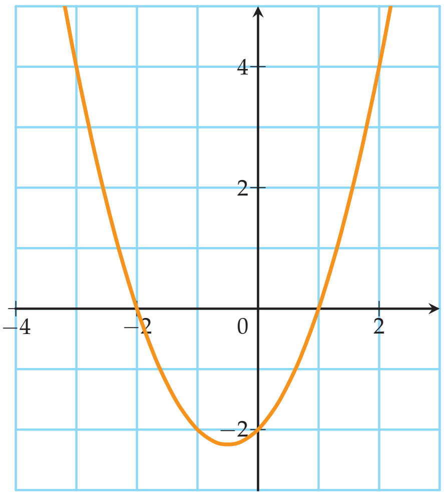
1 Justifier que les fonctions suivantes sont des fonctions polynômes du second degré.

1) $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$
2) $g(x) = 4x^2 - 3$
3) $h(x) = -3(x+7)(x-2)$
4) $k(x) = 2(x-1)^2 + 4$

2 On considère la fonction polynôme du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + x - 2$$

1) a) Montrer que 1 et (-2) sont deux racines de f.
b) Que peut-on en déduire graphiquement ?
2) On a tracé ci-dessous la parabole représentant f.



a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.
b) Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

Fonctions de la forme $x \longmapsto ax^2 + b$

3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

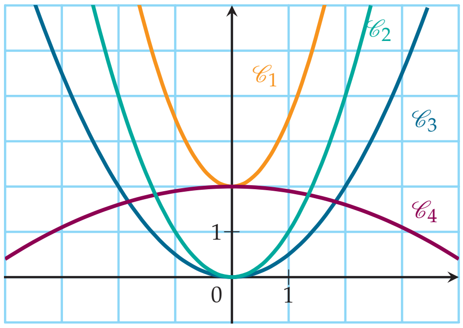
$$f(x) = 2x^2 - 1$$

1) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2) Sans faire aucun calcul, comparer les nombres :
a) $f(0,6)$ et $f(0,7)$ **b)** $f(-4)$ et $f(-2)$

4 Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$:

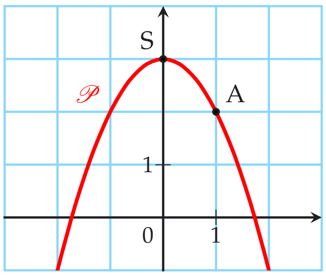
1) $f(x) = 0,5x^2$; **3)** $h(x) = x^2$;
2) $g(x) = 1,5x^2 + 2$; **4)** $k(x) = -0,1x^2 + 2$;

Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



5 On donne ci-dessous la parabole $\mathscr{P}$ représentant une fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

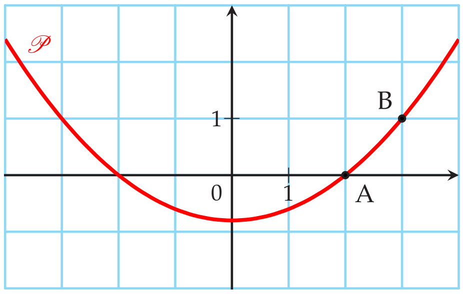
$$f(x) = ax^2 + b$$



Déterminer les valeurs de a et b et en déduire l'expression de la fonction f.

6 On donne ci-dessous la parabole $\mathscr{P}$ représentant une fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = ax^2 + b$$



Déterminer les valeurs de a et b et en déduire l'expression de la fonction f.

Résolution d'équations

Pour les exercices suivants, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

7

1) $x^2 = 100$ **2)** $x^2 = 15$ **3)** $-2x^2 + 19 = 7$

8

1) $x^2 - 5 = 0$ **2)** $2x^2 = x^2$ **3)** $x^3 - 4x = 0$

9

1) $x^2 + 3x = 3x - 1$ **2)** $3x^2 - 4x + 3 = 2^2 - 4x + 4$

10

1) $(x^2 - 4)(4 - 3x) = 0$ **2)** $(2x + 1)(4x^2 - 4) = 0$

11

1) $(x^2 - 9)(2 - 4x) = 0$ **2)** $(2x + 1)(x^2 - 7) = 0$

Factorisation

12 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

1) Vérifier que 1 est une racine de f.
2) En déduire l'autre racine de f.
3) Déterminer la forme factorisée de f.

13 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^2 + 2x - 15$$

1) Vérifier que 3 est une racine de g.
2) En déduire l'autre racine de g.
3) Déterminer la forme factorisée de g.

14 Factoriser, à l'aide des racines, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

1) $f(x) = x^2 + x - 42$ de racines -7 et 6.
2) $g(x) = 4x^2 + 3x - 1$ de racines -1 et $\frac{1}{4}$.
3) $h(x) = 2x^2 - x - 1$ de racines $-\frac{1}{2}$ et 1.

15 Factoriser, à l'aide d'une racine donnée, les fonctions polynômes du second degré suivantes :

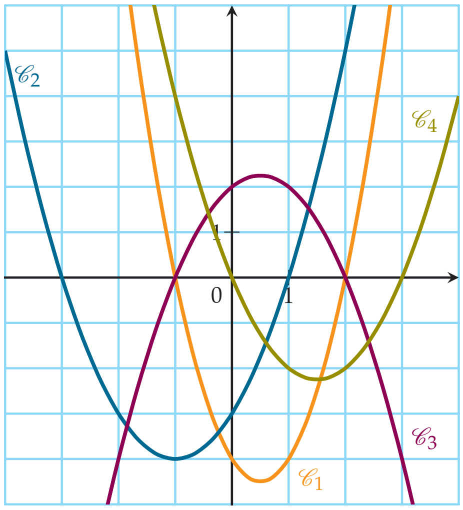
1) $f(x) = x^2 + 13x + 30$ de racine -3.
2) $g(x) = 5x^2 + 9x - 2$ de racine -2.
3) $h(x) = x^2 + 10x - 200$ de racine 10.

Fcts du type $x \longmapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

16 Les fonctions ci-dessous sont définies sur $\mathbb{R}$:

1) $f(x) = -(x - 2)(x + 1)$;
2) $g(x) = x(x - 3)$;
3) $h(x) = (x + 3)(x - 1)$;
4) $k(x) = 2(x - 2)(x + 1)$;

Associer chacune des courbes ci-dessous aux fonctions données.



17 Dresser le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}$:

1) $f(x) = 3(x - 4)(x - 1)$ **3)** $g(x) = -(x - 3)(x + 5)$
2) $h(x) = -2x(x + 1)$ **4)** $k(x) = (x + 3)^2$

18 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x - 1)(-x + 5)$$

1) Dresser le tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$.

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(-3x + 6)(2x - 8) \geqslant 0$ **2)** $(-5x + 4)(-x + 2) \leqslant 0$

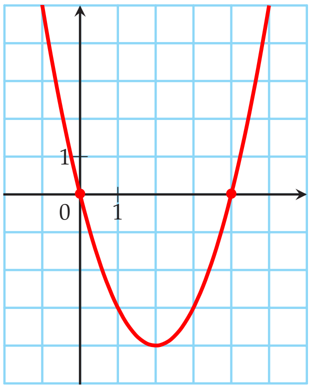
20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(4x + 8)(3 - 3x) > 0$ **2)** $(-2x + 1)(3x - 2) \leqslant 0$

S'entraîner

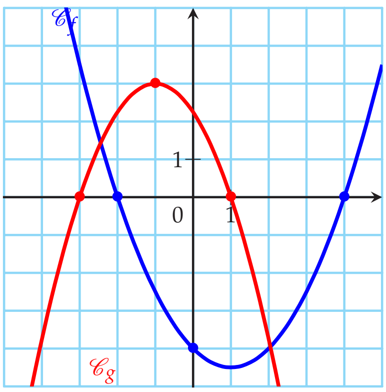
21 On a représenté ci-dessous une fonction polynôme du second degré dont l'expression est :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$



1) Quel est le signe de a ?
2) Quelles sont les valeurs de x_1 et x_2 ?
3) Déterminer la valeur de a sachant que le minimum de la fonction f vaut -4.

22 $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ données ci-dessous sont respectivement les courbes représentatives de deux fonctions f et g dont l'expression est de la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$ avec a, x_1 et x_2 réels.



1) Déterminer les valeurs de x_1 et de x_2 pour chacune de ces fonctions.
2) **a)** Déterminer, par lecture graphique, le réel $f(0)$.
b) En déduire l'expression de la fonction f.
3) **a)** Déterminer, par lecture graphique, le réel $g(-1)$.
b) En déduire l'expression de la fonction g.

E3C

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 6x + 8$$

1) Montrer que : $f(x) = -2(x + 1)(x - 4)$.
2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3) Faire un schéma à main levée de l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
4) Expliquer pourquoi le maximum de la fonction f est atteint lorsque $x = 1{,}5$.
5) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$.

24 En 2021, une entreprise compte produire au plus 60 000 téléphones portables pour la France et les vendre 800 €l'unité. On suppose que tous les téléphones produits sont vendus.

Le coût de production, en euros, est modélisé par la fonction C définie sur $[0\,;\,60\,000]$ par :

$$C(x) = 0{,}01x^2 + 250x + 2\,500\,000$$

où x représente le nombre de téléphones fabriqués et vendus.

1) **a)** Calculer $C(7500)$. Interpréter le résultat obtenu
b) Calculer le montant de la recette, en euros, que rapporte la vente de 7 500 téléphones. En déduire le montant du bénéfice, en euros, pour 7 500 vendus.
2) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;\,60\,000]$, le bénéfice, en euros, est défini par :

$$B(x) = -0{,}01x^2 + 550x - 2\,500\,000$$

où x représente le nombre de téléphone fabriqués et vendus.
3) **a)** Étudier les variations de la fonction B sur $[0\,;\,60\,000]$.
b) En déduire le nombre de téléphone que l'entreprise doit produire pour réaliser un bénéfice maximal. Donner la valeur ce bénéfice en euros.

25 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 3$$

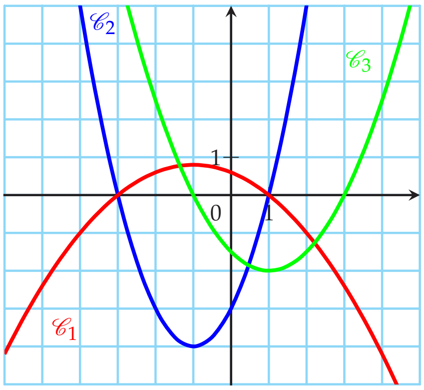
1) Parmi les nombres a, b et c suivants, lesquels sont des racines de f ?

a) $a = 1$ **b)** $b = 2$ **c)** $c = 3$

2) Montrer que la forme factorisée de la fonction f est $f(x) = (x-1)(x+3)$.

3) Étudier le signe de la fonction f.

4) Parmi les trois courbes proposées ci-dessous, déterminer celle représentant la fonction f.



5) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

26

Soit la fonction h définie sur $[0\,;\,4]$ par :

$$h(t) = -2,5t^2 + 8,5t + 2$$

On souhaite résoudre l'inéquation $h(t) > 9$.

1) Montrer que le problème revient à résoudre l'inéquation $-2,5t^2 + 8,5t - 7 > 0$.

2) Soit la fonction g définie sur $[0\,;\,4]$ par :

$$g(t) = -2,5t^2 + 8,5t - 7$$

a) Vérifier que 2 est une solution de l'équation $g(t) = 0$.

b) Vérifier que $g(t) = (t-2)(3,5-2,5t)$.

c) Construire le tableau de signes de $g(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,4]$.

3) Déduire des questions précédentes la solution au problème.

27 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

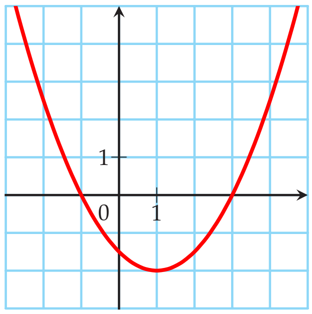
$$f(x) = 0,5(x+1)(x-3)$$

1) a) Quelle est la nature de la fonction f et celle de sa représentation graphique ?

b) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c) En déduire la valeur pour laquelle f admet un extremum. On précisera si cet extremum est un maximum ou un minimum en argumentant et on calculera sa valeur.

2) On a tracé ci-dessous la représentation graphique de la fonction f.



Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
On laissera sur le graphique les traces de raisonnement.

3) On appelle x_1 la solution de l'équation $f(x) = 2$ appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,-1]$ et x_2 la solution appartenant à l'intervalle $[3\,;\,4]$.
On cherche à déterminer un encadrement de x_2 d'amplitude 10^{-n}. Pour cela on a écrit l'algorithme ci-contre en langage Python.

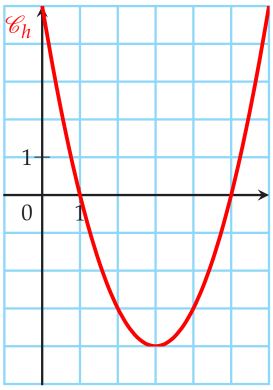
```
def f(x) :
    return 0.5*(x+1)*(x-3)

def balayage(n) :
    x=3
    pas=10**(-n)
    while f(x)<2:
        x=x+pas
    return (x-pas,x)
```

Que faut-il taper dans la console pour obtenir un encadrement de x_2 d'amplitude 0,001 ?

S'entraîner

28 Pour se nourrir, un oiseau plonge dans la mer depuis le haut d'une falaise d'une hauteur de 5 mètres.
La trajectoire de l'oiseau est modélisée par la courbe représentative d'une fonction h tracée sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ dans le repère orthonormé ci-dessous.
Dans ce repère, l'axe des abscisses représente le niveau de la mer et l'axe des ordonnées représente la falaise.
$h(x)$ désigne alors l'altitude en mètres de l'oiseau par rapport au niveau de la mer et x désigne la distance en mètres qui le sépare de la falaise.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux deux questions suivantes.

1) Quelle est l'image de 0 par la fonction h ? Interpréter dans le contexte de l'exercice.
2) À quelles distances de la falaise se trouve l'oiseau lorsqu'il est à une profondeur de 3 mètres sous la mer ?
3) La fonction h est définie sur l'intervalle $[0\,;\,6]$ par :

$$h(x) = x^2 - 6x + 5$$

Montrer que $h(x) = (x-1)(x-5)$
4) En déduire le tableau de signes de la fonction h sur $[0\,;\,6]$.
5) Résoudre l'inéquation $h(x) < 0$ et interpréter dans le contexte de l'exercice.

29 L'entreprise SAVEUR fabrique et commercialise de l'extrait de parfum. Elle est en capacité d'en produire jusqu'à 34 hectolitres par mois. On suppose que toute la production est vendue.

On modélise le coût de production mensuel, en centaines d'euros, de x hectolitres d'extrait de parfum par la fonction C définie par $C(x) = 2x^2 + 12x + 240$, où $x \in [0\,;\,34]$.

Chaque hectolitre d'extrait de parfum est vendu 80 centaines d'euros.

1) a) Calculer le coût de production mensuel et la recette réalisée par l'entreprise lorsqu'elle produit 6 hectolitres d'extrait de parfum dans le mois.
   b) L'entreprise réalise-t-elle un profit lorsqu'elle produit et vend 6 hectolitres d'extrait de parfum par mois
2) Démontrer que le bénéfice, en centaines d'euros, pour la vente de x hectolitres d'extrait de parfum, est donné par la fonction B définie par :

$$B(x) = -2x^2 + 68x - 240$$

3) Justifier que, pour tout réel $x \in [0\,;\,34]$:

$$B(x) = (-2x+8)(x-30)$$

4) Étudier le signe de $B(x)$, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,34]$, et en déduire la quantité d'extrait de parfum à produire et à vendre pour que l'entreprise ne travaille pas à perte.
5) Déterminer le montant, en euros, du bénéfice maximal que peut réaliser l'entreprise en vendant cet extrait de parfum.