FONCTIONS

6

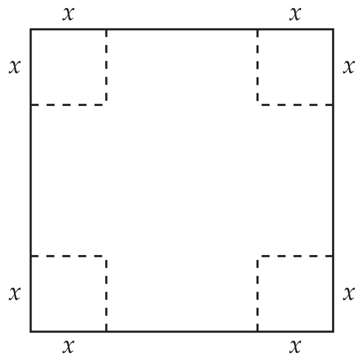
Dérivation II

Les savoir-faire du chapitre

- **1STMG.150** Connaître le lien entre le signe de f' et le sens de variation de f.
- **1STMG.151** Calculer la dérivée d'une fct polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
- **1STMG.152** Déterminer les variations et les extremums d'une fonction polynôme de degré 2 ou 3.

Activité d'introduction

Dans une plaque de carton carrée de 1,20 mètre de côté, on découpe des carrés aux quatre coins afin de construire une boîte sans couvercle.



Comment faire pour obtenir une boîte de volume maximal ?

Signe de f' - variations de f

1 On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ et $f(4) = 3$.

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2 On donne ci-dessous le tableau de signes de la dérivée d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f(-1) = 1$, $f(0) = -1$, $f(3) = 2$.

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dresser le tableau de variation de la fonction f.

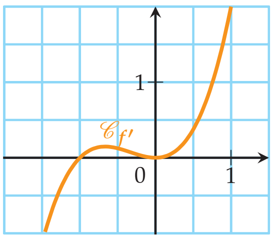
3 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de signes de $f'(x)$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) f admet-elle des extremums ? Justifier.

4 Soit f une fonction dérivable sur $[-2\,;\,1]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_{f'}$ de la dérivée.



1) Dresser le tableau de variation de la fonction f

2) Répondre par vrai ou faux, en justifiant :

a) f admet un minimum en -1 ;

b) f admet un maximum en 0.

5 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est $f'(x) = (x-1)(x-2)$.
Donner le sens de variation de f.

6 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
f		$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\searrow$	

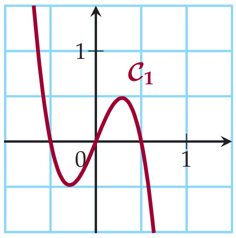
Donner le signe de $f'(x)$.

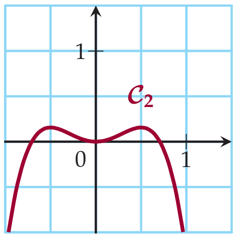
7 On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		1		4		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Établir le tableau de signes de $f'(x)$.

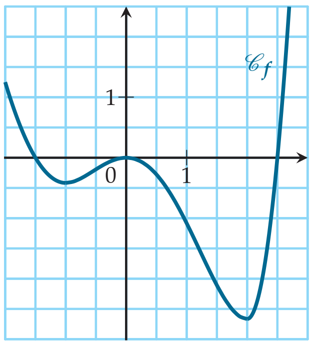
8 Voici deux courbes dont l'une représente une fonction f et l'autre sa dérivée f'.





Quelle est la courbe représentant f et quelle est celle représentant f' ?

9 Soit f une fonction dérivable sur $[-2\,;\,3]$ dont on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.



1) Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) > 0$ **c)** $f'(x) > 0$

b) $f(x) < 0$ **d)** $f'(x) < 0$

2) Résoudre graphiquement les équations :

a) $f(x) = 0$ **b)** $f'(x) = 0$

Calcul de dérivée

10 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = x^3 + 5$ **2)** $g(x) = x^2 + x$

11 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 4x$ **2)** $g(x) = 3x^2$ **3)** $h(x) = -5x^3$

12 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5$ **3)** $h(t) = t^3 - 4t^2 + 2$

2) $g(x) = -x^3 + 2x - 3$ **4)** $C(q) = 4q^2 - 5t + 3$

13 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 11$$

Calculer $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

Extremums d'une fonction

14 Voici la tableau de signes de la fonction dérivée d'une fonction f.

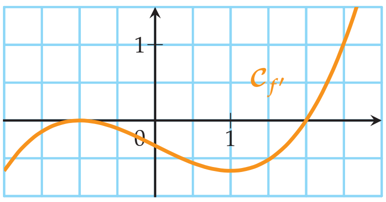
Sans établir le tableau de variations de f, dire en quelle(s) valeur(s) f admet-elle un (des) extremum (extrema) local (locaux) ? Préciser leur nature.

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

15 Même consigne que l'exercice précédent.

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

16 Soit f une fonction dérivable sur $[-2\,;\,3]$ dont on donne la courbe représentative $\mathcal{C}_{f'}$ de la dérivée.



1) Déterminer les valeurs de x en lesquelles f admet des extrema locaux.

2) Préciser la nature de ces extrema.

17 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 8x + 1$$

1) **a)** Calculer $f'(x)$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$

2) **a)** Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que f admet un extremum sur $\mathbb{R}$. Préciser en quelle valeur de x il est atteint.

18 Reprendre l'exercice précédent avec la fonction f définie sur $[-2\,;\,6]$ par :

$$f(x) = 0{,}11x^2 - 0{,}66x + 1{,}86$$

19 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\,;\,2]$ par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 4$$

1) **a)** Calculer $f'(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [-3\,;\,2]$, $f'(x) = 6(x+2)(x-1)$

2) **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-3\,;\,2]$ et en déduire le tableau de variation de f.

b) Déterminer les extremums de f sur $[-3\,;\,2]$ et préciser en quelles valeurs de x ils sont atteints.

Problèmes

20 Un producteur de truffes noires cultive, ramasse et conditionne de 0 à 45 kilogrammes ce produit par semaine durant la période de production de la truffe.

On désigne par $B(x)$ le bénéfice hebdomadaire (en euros) réalisé par la vente de x kilogrammes de truffes. La fonction B est définie sur l'intervalle $[0\ 45]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 60x^2 - 525x$$

1) **a)** Calculer $B'(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x \in [0\,;\,45]$:

$$B'(x) = -3(x-5)(x-35)$$

2) **a)** Étudier le signe de $B'(x)$ sur $[0\ 45]$.

b) Dresser le tableau de variation de B sur $[0\ 45]$.

3) Pour quelle quantité de truffes le bénéfice du producteur est-il maximal ?

Quel est le bénéfice maximal réalisé ?

S'entraîner

21 Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin d'obtenir une surface brillante, une casse nette et d'éviter d'avoir des traces de blanchiment.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,12{,}5]$ par :

$$f(t) = 0{,}14t^3 - 3{,}15t^2 + 18{,}48t + 18$$

Lorsque t représente le temps (en minutes), on admet que $f(t)$ modélise la température (en degré Celsius) du chocolat à l'instant t, au cours d'une opération de tempérage.

1) Pour tout $t \in [0\,;\,12{,}5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = 0{,}42(t-4)(t-11)$.
2) Construire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,12{,}5]$.
3) Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage du chocolat ?

22 **Économie : coût marginal**

Une entreprise fabrique des biens. On note q la quantité de biens produits et on admet que le coût de fabrication, en milliers d'euros, de q unités est donné par :

$$C(q) = -\frac{q^2}{100\,000} + \frac{q}{10} + 1$$

1) Un exemple :
   a) Donner le coût de fabrication de 1 000 unités puis de 1001 unités.
   b) En déduire le coût de fabrication de cette unité supplémentaire.
2) On appelle « coût marginal au rang q » la différence $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ qui représente donc le coût induit par la production d'une unité supplémentaire lorsque q unités sont déjà fabriquées.
   a) Exprimer $C_m(q)$ comme un taux d'accroissement.
   b) Calculer $C_m(q)$ et vérifier que l'on retrouve bien la réponse à la question **1)b)**.
3) En pratique, on ne calcule pas $C_m(q)$ comme ci-dessus mais on prend $C'(q)$ comme valeur approchée du coût marginal au rang q.
   a) Justifier mathématiquement cette approximation.
   b) Calculer $C'(q)$.
   c) En déduire l'erreur commise en assimilant $C_m(q)$ à $C'(q)$.
   d) Vérifier, en calculant $C'(1\,000)$, que l'on retrouve environ le résultat de la question **1)b)**.

E3C

23 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 8$$

1) **a)** Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$.
   b) Vérifier que pour tout $x \in [-5\,;\,5]$:
$$f'(x) = 3(x-4)(x+2)$$
2) **a)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-5\,;\,5]$.
   b) En déduire les variations de f sur $[-5\,;\,5]$.
3) Déterminer la valeur de x pour laquelle la fonction f admet un maximum sur l'intervalle $[-5\,;\,5]$ et en préciser la valeur.

24 L'objectif de l'exercice est de trouver le maximum de la fonction f définie sur l'intervalle $[200\,;\,400]$ par :

$$f(x) = -0{,}01x^3 + 4x^2$$

1) On admet que la fonction f est dérivable sur $[200\,;\,400]$ et on note f' sa dérivée.
Calculer $f'(x)$ et montrer que :
$$f'(x) = x(-0{,}03x + 8)$$
2) Donner le tableau de signe de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[200\,;\,400]$.
3) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[200\,;\,400]$.
4) Quel est le maximum de cette fonction sur l'intervalle $[200\,;\,400]$? En quelle valeur est-il atteint ?
5) Pour vérifier la solution de l'équation $f'(x) = 0$ sur l'intervalle $[200\,;\,400]$, on utilise l'algorithme de balayage ci-dessous, écrit en langage Python :

```python
def balayage(pas):
    x=200
    while x*(-0.03*x+8)>0:
        x=x+pas
    return (x-pas , x)
```

Que renvoie l'instruction balayage(1) ?