POURCENTAGES
STATISTIQUES
PROBABILITÉS

7

Variable aléatoire

Les savoir-faire du chapitre

- **1STMG.240** Interpréter les évènements $\{X = a\}$ et $\{X < a\}$ et calculer leur probabilité.
- **1STMG.241** Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- **1STMG.242** Calculer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire.

Activité d'introduction

Jérémyos intente un procès qui, s'il le gagne, lui rapportera la somme de 100 000 €.
Il a le choix entre deux avocats : Clémentos et Nabolos.

Clémentos réclame des honoraires fixes de 12 000 €. Nabolos réclame 30 % de la somme si le procès est gagné et rien sinon.

Chacun des deux avocats assure que le client a 75 % de chances de gagner le procès.

En se basant sur l'espérance de gain dans chaque cas, conseillez Jérémyos dans son choix de l'avocat.

S'entraîner

Évènements

1 A et B sont deux événements tels que :

$$P(A) = \frac{1}{2}\,;P(B) = \frac{1}{3} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

Calculer $P(A \cup B)$.

2 A et B sont deux évènements tels que :

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,41$;
$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 0,12$;
$P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0,2$.

1) Faire un diagramme.
2) Calculer $P\left(A \cup B\right)$, $P\left(A \cap B\right)$, $P\left(A\right)$ et $P\left(B\right)$.

3 Suite à une étude statistique, on a observé que sur une population :

- 40 % des individus possèdent une tablette ;
- 80 % des individus ont un ordinateur ;
- 30 % des individus possèdent à la fois une tablette et un ordinateur.

Quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard :

1) ait une tablette mais pas d'ordinateur ?
2) ait un ordinateur mais pas de tablette ?
3) ne possède ni tablette, ni ordinateur ?

4 L'association artistique d'une commune propose deux activités : peinture à l'huile et aquarelle. 60 % des adhérents sont inscrits au cours de peinture à l'huile, 35 % au cours d'aquarelle et 7 % aux deux. On interroge un adhérent au hasard. On note H l'événement : « L'adhérent interrogé pratique la peinture à l'huile » et A l'événement : « L'adhérent interrogé pratique l'aquarelle ».

1) Recopier et compléter le tableau des fréquences en pourcentages.

	A	$\overline{A}$	Total
H			60
$\overline{H}$			
Total			100

2) Définir par une phrase les événements suivants et calculer leurs probabilités.
   a) $H \cap \overline{A}$; b) $\overline{H} \cap A$; c) $\overline{H} \cap \overline{A}$.

Loi de probabilité d'une variable aléatoire

5 Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de passages à l'infirmerie dans un lycée dans une journée.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,35	0,3	0,25	...

1) Calculer le réel $p(X = 3)$.
2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux passages à l'infirmerie dans la journée.

6 La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	0,02	0,12	a	0,31	0,27

1) Calculer le réel a.
2) Calculer $P(X \geq 2)$ et $P(X > 0)$.

7 Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	0	1	2
p_i	p	$2p$	$3p$

Calculer p.

8 Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains devant peser normalement 500 g.

On note X la variable aléatoire donnant les masses possibles des pains en grammes.

On donne la loi de probabilité de X :

x_i	480	490	500	510	520
p_i	0,08	0,29	0,41	0,12	0,1

1) Quelle est la probabilité qu'un pain pèse au moins 500 g ?
2) Seuls les pains pesant au moins 490 g vont être commercialisés.
   Quelle est la probabilité qu'un pain soit commercialisé ?

Espérance d'une variable aléatoire

9 Une variable aléatoire prend chacune des valeurs 0 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives 0,21 ; 0,16 et 0,63. Calculer $E(X)$.

10 Une variable aléatoire prend chacune des valeurs -2 ; 1 ; 2 avec les probabilités respectives $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$. Calculer $E(X)$.

11 Le tableau suivant donne la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,25	0,4	0,2	0,05

1) Vérifier que ce tableau définit bien une loi de probabilité.
2) Calculer $P(X \geq 0)$ puis $P(X < 1)$.
3) Calculer $E(X)$.

12 Le nombre de clients passant à la caisse d'un supermarché en 10 min est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité ci-dessous.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

Combien de clients, en moyenne, le caissier peut-il espérer faire passer en une heure ?

13 On donne la ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui représente le gain (positif ou négatif) associé à un jeu.

x_i	-4	-3	0	2	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Le jeu est il équitable ? Est-il favorable au joueur ou défavorable au joueur ?

14 On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

Calculer a sachant que $E(X) = 1,2$.

x_i	-7	3	a
p_i	0,3	0,5	0,2

Approfondissements

15 On considère un jeu de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. Une partie consiste à lancer successivement trois fois la pièce.

On note P la sortie de PILE et F la sortie de FACE.

1) Donner, à l'aide d'un arbre, la liste des huit issues possibles.
2) Chaque PILE obtenu fait gagner 2 € mais chaque FACE fait perdre 3 €. De plus, si les trois lancers de la partie donnent un résultat identique, le joueur reçoit en plus un bonus de 2 €.

On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain réalisé.

a) Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance.
c) Quel bonus p faut-il donner au joueur pour que le jeu soit équitable ?

16 Une entreprise fabrique des objets. 5 % des objets présentent au moins le défaut A, 3 % des objets présentent au moins le défaut B et 94 % n'ont aucun des défauts A et B.

1) Compléter la répartition des objets par les pourcentages qui conviennent.

	A	$\overline{A}$	Total
B			
$\overline{B}$			
Total			100

2) On prélève un objet au hasard.
a) Calculer la probabilité que cet objet ne présente aucun défaut.
b) Calculer la probabilité que cet objet présente au moins un défaut.

3) La réparation du défaut A coûte 2 euros et celle du défaut B coûte 3 euros. On note X la variable aléatoire qui donne le coût de réparation par objet.
a) Quelles valeurs peut prendre X ?
b) Calculer $E(X)$.

S'entraîner

17 Une revue est proposée en deux versions :
- une version papier ;
- une version numérique.

L'éditeur a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.
Le centre d'appel contacte au hasard une personne de cette liste :
- I : « La personne s'abonne à l'édition imprimée » ;
- N : « La personne s'abonne à l'édition numérique ».

Une étude a montré que la probabilité que la personne :
- s'abonne à l'édition imprimée est de 0,2 ;
- s'abonne à l'édition numérique est de 0,16 ;
- ne s'abonne à aucune des versions est de 0,72 ;

1) Compléter le tableau de probabilité suivant :

	I	$\overline{I}$	Total
N			
$\overline{N}$			
Total			

2) Pour chacune des personnes contactées, l'éditeur verse au centre d'appel :
   - 2 € si la personne ne s'abonne pas ;
   - 10 € si elle s'abonne à la seule édition numérique ;
   - 15 € si elle s'abonne à la seule édition imprimée ;
   - 20 € si elle s'abonne aux deux éditions.

   On note X la variable aléatoire qui indique la somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   b) Donnez une estimation de la somme perçue par le centre d'appel s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels.

18 Une urne contient 25 boules indiscernables au toucher de deux couleurs : 6 rouges et 19 jaunes.

- Parmi les rouges, trois portent le numéro 0, deux le numéro 5 et une le numéro 10 ;
- Parmi les jaunes, dix portent le numéro 0, cinq le numéro 1, deux le numéro 5 et deux le numéro 10.

1) On tire au hasard une boule de l'urne. Déterminer, sous forme décimale, la probabilité des évènements suivants :
   - A :« la boule tirée ne porte pas le nombre 0 » ;
   - B :« la boule tirée est rouge et porte un numéro pair » ;
   - C :« la boule tirée est jaune et porte un numéro impair ».
2) On organise une tombola.
   Pour participer à une partie, un joueur doit miser 2 €.
   Il tire ensuite une boule de l'urne.
   - Si cette boule est jaune, il reçoit une somme égale au numéro inscrit sur la boule ;
   - Si cette boule est rouge, il reçoit une somme égale au double du numéro inscrit sur la boule ;

   On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

   a) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
   b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   c) Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.

19 Blanche et Clara ont décidé d'offrir chacune un cadeau à une amie commune pour son anniversaire. Elles choisissent chacune indifféremment un livre, un disque ou un bijou.

1) a) Écrire les 9 issues possibles en s'aidant d'un arbre.
   b) On considère les trois événements suivants :
      - A : « Les deux ont offert un bijou » ;
      - B : « Personne n'a offert de livre » ;
      - C : « Au plus une des deux amies a offert de disque ».

   c) Calculer les probabilités de chacun des événements A, B et C.
2) On admet qu'un livre coûte 20 €, un CD coûte 10 € et un bijou coûte 15 €.
   On note S la variable aléatoire qui donne la somme totale en euros dépensée par les trois amies.
   a) Déterminer les valeurs prises par S.
   b) Dresser le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire S.
   c) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire S.