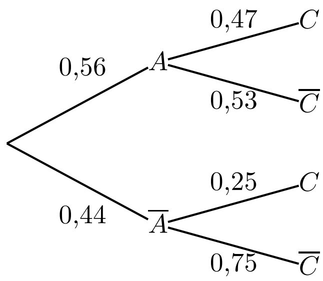
MATHEMATIQUES
Probabilités conditionnelles - Indépendance : QCM (corrigé)

Exercice 1

1. • Le premier arbre ne convient pas : la somme des probabilités issues du premier noeud ne vaut pas 1.

• Le troisième arbre ne convient pas. Sur celui-ci, 47 % de l'ensemble des tirs sont cadrés alors que c'est 47 % des tirs des footballeuses américaines qui le sont. C'est donc $P_A(C) = 0,47$.



Réponse : b.

2. $P_{\overline{A}}(C)$ est la probabilité de l'événement C sachant $\overline{A}$.

C'est donc la probabilité que le tir soit cadré sachant qu'il provient d'une joueuse non américaine (donc japonaise).
On a $P_{\overline{A}}(C) = 0,25$

Conseil
Il faut toujours bien comprendre quelle est la probabilité à déterminer. On retrouve cette probabilité dans l'arbre sur le deuxième niveau.

Réponse : e.

3. La probabilité que le tir ne soit pas cadré ($\overline{C}$) sachant qu'il a été réalisé par une joueuse japonaise est : $P_{\overline{A}}(\overline{C})$.

On a $P_{\overline{A}}(\overline{C}) = 0,75$

Conseil
C'est un peu l'inverse de la question précédente. Vous devez ici interpréter la probabilité demandée avec les événement de l'énoncé.
On a $P_{\overline{A}}(\overline{C}) = 1 - P_{\overline{A}}(C)1-,025 = 075.$

Réponse : f.

4. La probabilité que le tir soit cadré est donné par : $P(C)$.
Comme A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, on a :

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap A) + P(C \cap \overline{A}) \\ &= P(A) \times P_A(C) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(C) \\ &= 0,56 \times 0,47 + 0,44 \times 0,25 \\ &= 0,3732 \end{aligned}$$

Citez-là
Il s'agit de la formule des probabilités totales.

Réponse : d.

5. La probabilité que le tir ait été réalisé par une joueuse japonaise sachant qu'il est cadré est donné par :

$$P_C(\overline{A})$$

On a $P_C(\overline{A}) = \dfrac{P(\overline{A} \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0,44 \times 0,25}{0,3732} \simeq 0,295.$

Réponse : a. d.

6. Les événements A et C sont indépendants si et seulement si $P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$.

- $P(A \cap C) = 0,56 \times 0,47 = 0,2632$.
- $P(A) \times P(C) = 0,56 \times 0,3732 = 0,208992$.

Ainsi, $P(A \cap C) \neq P(A) \times P(C)$.

Réponse : b.

Aussi

On a $P_A(C) \neq P(C)$. Ainsi, A et C ne sont pas indépendants.

Exercice 2

1. p_1 est la probabilité que le renard soit venu le 1^er^ jour. Or, le renard est venu aujourd'hui, donc $p_1 = 1$.

Réponse : b.

2. Les probabilités $\dfrac{1}{3}$ et $\dfrac{11}{12}$ sont des probabilités du deuxième niveau de l'arbre. Ce sont des probabilités conditionnelles.
On a de plus, $p(R_n) = p_n$ et par conséquent $p(\overline{R_n}) = 1 - p_n$.

L'arbre qui décrit la situation est celui présenté en a.

Réponse : a.

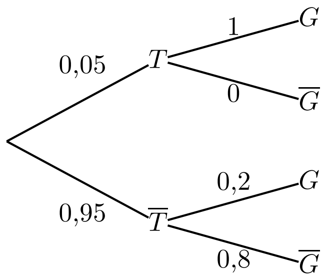
3. $p_{n+1} = p(R_{n+1})$.
Comme R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales : :

$$\begin{aligned}
p(R_{n+1}) &= p(R_n \cap R_{n+1}) + p(R_n \cap \overline{R_{n+1}}) \\
&= p(R_n) \times P_{R_n}(R_{n+1}) + p(\overline{R_n}) \times P_{\overline{R_n}}(R_{n+1}) \\
&= p_n \times \frac{1}{3} + (1 - p_n) \times \frac{11}{12} \qquad \text{Réponse c.} \\
&= \frac{1}{3} p_n + \frac{11}{12} - \frac{11}{12} p_n \\
&= \frac{4}{12} p_n - \frac{11}{12} p_n + \frac{11}{12} \\
&= -\frac{7}{12} p_n + \frac{11}{12} \qquad \text{Réponse d.}
\end{aligned}$$

Réponse : c. d.

Exercice 3

En notant T : « Math triche » et G : « Math gagne la partie », on obtient l'arbre pondéré suivant :



La probabilité cherchée est $P_G(T)$.

$P_G(T) = \dfrac{P(G \cap T)}{P(G)}$.

Il s'agit donc de calculer $P(G \cap T)$ et $P(G)$.

Explication

On sait que Math a gagné une partie. On veut la probabilité qu'il ait triché. C'est donc bien une probabilité conditionnelle que l'on cherche.

- $P(G \cap T) = P(T) \times P_T(G) = 0,05 \times 1 = 0,05$.
- D'après la formule des probabilités totales, comme T et $\overline{T}$ forment une partition de l'univers, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} P(G) & = & P(T \cap G) + P(\overline{T} \cap G) \\ & = & P(T) \times P_T(G) + P(\overline{T}) \times P_{\overline{T}}(G) \\ & = & 0,05 \times 1 + 0,95 \times 0,2 \\ & = & 0,24 \end{array}$$

La probabilité que Math gagne est 0,24.

Ainsi, $P_G(T) = \dfrac{0,05}{0,24} = \dfrac{5}{24}$.

Réponse : a.