MATHEMATIQUES

Probabilités - Variables aléatoires : entraînement savoir-faire (corrigé)

Exercice 1

1. a. • $\{X = 3\}$ est l'événement : "Le magasin a donné 3 sacs ".

b. • $\{X \leqslant 2\}$ est l'événement : "Le magasin a donné au moins 2 sacs ".

c. • $\{1 < X\}$ est l'événement : "Le magasin a donné plus d'un sac ".

d. • $\{X > 3\}$ est l'événement : "Le magasin a donné plus de 3 sacs ".

e. • $\{X \geqslant 1\}$ est l'événement : "Le magasin a donné au moins un sac ".

2. a. • L"événement : "Le magasin n'a pas donné de sac " est $\{X = 0\}$.

b. • L'événement : "Le magasin a donné au moins 2 sacs " est $\{X \geqslant 2\}$.

c. • L'événement : "Le magasin a donné au plus 3 sacs " est $\{X \leqslant 3\}$.

d. • L'événement : "Le magasin a donné 4 sacs ou plus " est $\{X \geqslant 4\}$.

e. • L'événement : "Le magasin a donné plus d'un sac mais moins de 4 sacs " est $\{1 < X < 4\}$.

Autrement

L'événement : "Le magasin a donné plus d'un sac mais moins de 4 sacs " est aussi $\{2 \leqslant X \leqslant 3\}$.

3. Calcul des probabilités :

a. Calcul de $P(\{X \leqslant 2\})$:
$\{X \leqslant 2\}$ est l'événement "le magasin a donné au plus deux sacs".

Sa probabilité est donné par :

$P(\{X \leqslant 2\}) = P(\{X = 0\}) + P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) = 0,01 + 0,05 + 0,07 = 0,13$

Attention à la confusion

Ne confondez pas l'événement avec sa probabilité (qui est un nombre).

b. Calcul de $P(\{X > 4\})$:

$\{X > 4\}$ est l'événement "le magasin a donné plus de 4 sacs".

Sa probabilité est donné par :

$$P(\{X > 4\}) = P(\{X = 5\}) + P(\{X = 6\}) + P(\{X \geqslant 7\}) = 0,3 + 0,08 + 0,06 = 0,44$$

c. Calcul de $P(\{X \geqslant 1\})$:

$\{X \geqslant 1\}$ est l'événement "le magasin a donné au au moins un sac".

Sa probabilité est donné par :

$$\begin{aligned} P(\{X \geqslant 1\}) &= P(\{X = 1\}) + P(\{X = 2\}) + \ldots\ldots + P(\{X \geqslant 7\}) \\ &= 0,01 + 0,05 + \ldots.. + 0,06 \\ &= 0,99 \end{aligned}$$

Autre méthode :
L'événement contraire l'événement A est $\{X = 0\}$.
Comme $P(\overline{A}) = P(\{X = 0\}) = 0,01$, alors :

$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,01 = 0,99.$

Au moins un
C'est beaucoup plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire de A. Et comme quand on une relation qui lie les probabilités d'un événement et de son contraire. C'est une méthode qui sert régulièrement en probabilité.

Exercice 2

1. Un petit tableau qui permet de visualiser les différentes situations.

Billets de 5 €	Billets de 10 €	Billets de 20 €	Total
6	0	0	30
4	1	0	30
2	2	0	30
2	0	1	30
0	3	0	30
0	1	1	30

Soyez prudent
Pour ne pas oublier de possibilités, procédez méthodiquement. Par exemple, il est impossible d'avoir un nombre impair de billets de 5 euros.

La variable aléatoire X compte le nombre de billets qui sortent de l'appareil : elle peut prendre les valeurs 6, 5, 4, 3 et 2.

La variable aléatoire Y compte le nombre de billets de 5 euros qui sortent de l'appareil : elle peut prendre les valeurs 6, 4, 2 et 0.

L'événement $\{X \geqslant 2\}$ est l'événement « au moins 2 billets sortent de l'appareil » et l'événement $\{Y \geqslant 1\}$ est l'événement « au moins un billet de 5 euros sort de l'appareil ».

2. X peut prendre les valeurs 10, 5, 2 et 1.
On est dans une situation d'équiprobabilité, donc :

- $P(X = 10) = \dfrac{\text{nombre de boules bleues}}{\text{nombre total de boules}} = \dfrac{1}{10} = 0,1.$
- $P(X = 5) = \dfrac{\text{nombre de boules vertes}}{\text{nombre total de boules}} = \dfrac{2}{10} = 0,2.$
- $P(X = 2) = \dfrac{\text{nombre de boules jaune}}{\text{nombre total de boules}} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$
- $P(X = 1) = \dfrac{\text{nombre de boules rouges}}{\text{nombre total de boules}} = \dfrac{4}{10} = 0,4.$

On obtient le tableau de loi de probabilité suivant :

x_i	10	5	2	1
$P(X = x_i)$	0,1	0,2	0,3	0,4

3. En notant x les probabilités manquantes, on obtient l'équation :

$$\begin{aligned}
0,2 + 0,16 + x + x &= 1 \\
0,36 + 2x &= 1 \\
2x &= 1 - 0,36 \\
2x &= 0,64 \\
x &= 0,32
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. $E(X)=0,25\times 1+0,4\times 2+0,05\times 3+0,3\times 4=2,4$

2. Calcul de la variance :

$$\begin{aligned} V(X)&=p_1(x_1-E(X))^2+p_2(x_2-E(X))^2+p_3(x_3-E(X))^2+p_4(x_4-E(X))^2\\ &=0,25\times(1-2,4)^2+0,4\times(2-2,4)^2+0,05\times(3-2,4)^2+0,3\times(4-2,4)^2\\ &=1,34\end{aligned}$$

L'écart-type est donné par $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1,34}\simeq 1,16$.

Exercice 4

1. X peut prendre les valeurs : 2 (si la face est jaune), 4 (si la face est bleue) et -1 (si la face est rouge).
On est dans une situation d'équiprobabilité, donc :

- $P(X=2)=\dfrac{\text{nombre de faces jaunes}}{\text{nombre total de faces}}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.
- $P(X=4)=\dfrac{\text{nombre de faces bleues}}{\text{nombre total de faces}}=\dfrac{1}{6}$.
- $P(X=-1)=\dfrac{\text{nombre de faces rouges}}{\text{nombre total de faces}}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$.

x_i	-1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

2. $E(X)=-1\times\dfrac{1}{2}+2\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{1}{6}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{6}=\dfrac{5}{6}\simeq 0,83$.

Cela signifie que si on joue un grand nombre de parties à ce jeu, on gagnera en moyenne 0,83 € par partie. Le jeu est donc favorable au joueur. C'est très rare profitez-en !

Exercice 5

1. $E(X)=0,1\times 2+0,25\times 3+0,35\times 4+0,25\times 5+0,05\times 6=3,9$.

2. Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire S sont :

- 34 (quand il y a 2 attractions choisies) ;
- 36 (quand il y a 3 attractions choisies) ;
- 38 (quand il y a 4 attractions choisies) ;
- 40 (quand il y a 5 attractions choisies) ;
- 42 (quand il y a 6 attractions choisies) ;

Bon réflexe

En présence d'une variable aléatoire, le premier réflexe est de donner ses valeurs possibles. Cela permet de comprendre la situation.

On en déduit le tableau qui donne la loi de probabilité de S :

s_i	34	36	38	40	42
$P(S=s_i)$	0,10	0,25	0,35	0,25	0,05

$E(S)=0,1\times 34+0,25\times 36+0,35\times 38+0,25\times 40+0,05\times 42=37,8$.
En moyenne un visiteur dépense 37,8 € pendant la journée qu'il passe dans le parc.

On pouvait faire autrement

On éexprime S en fonction de X et on calcule l'espérance de S à partir de celle de X :

$S=\underbrace{30}_{\text{carte}}+\underbrace{2}_{\text{prix pour une attraction}}\times\underbrace{X}_{\text{nombre d'attractions}}=30+2X$

$E(S)=E(30+2X)=30+2E(X)=30+2\times 3,9=37,8$.

3. • $200 \times 25 = 5000$. Les frais d'organisation du parc s'élèvent à 5000 € par jour.

• $5000 \times 365 = 1825000$. Sur l'année les frais s'élèvent à 1 825 000 €.

• $200 \times 37,8 \times 365 = 2759400$. La recette du parc sur l'année est de 2 759 400 €.

• $2759400 - 1825000 = 934400$. Le bénéfice que peut espérer le gérant du parc est 934 400 € sur l'année.

Le bénéfice

Le bénéfice s'obtient en faisant la différence entre la recette et les coûts.
Remarque : un bénéfice négatif est une perte d'argent.