Cours & méthodes

Fonctions trigonométriques

3

ANALYSE

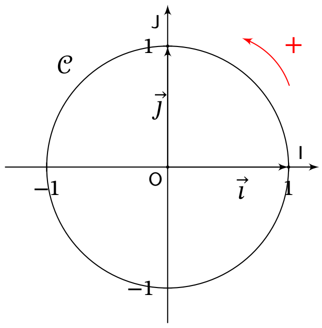
1 Repérage sur le cercle trigonométrique. Radian

1.1 Cercle trigonométrique

Définition : Cercle trigonométrique

Dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 est appelé **cercle trigonométrique**.

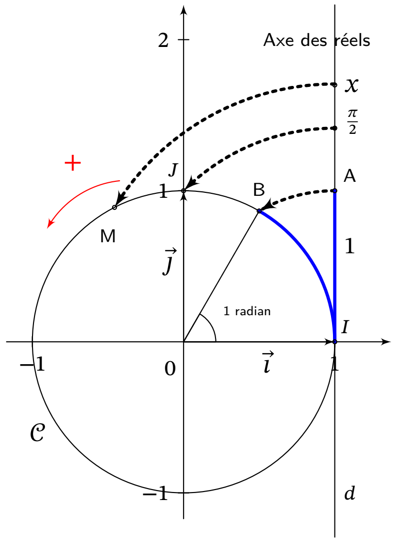
- le sens direct ou trigonométrique est le sens contraire des aiguilles d'une montre ;
- le sens indirect ou anti-trigonométrique est le sens horaire.



1.2 Enroulement de la droite des réels

Par enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle. M est le point-image de x sur le cercle $\mathcal{C}$. On note $\mathrm{M}(x)$.

Réciproquement, à tout point M du cercle trigonométrique correspondent une infinité de valeurs.
Si x est une de ces valeurs, les autres sont de la forme $x+2\pi$, $x+4\pi$, $x-2\pi$, ...

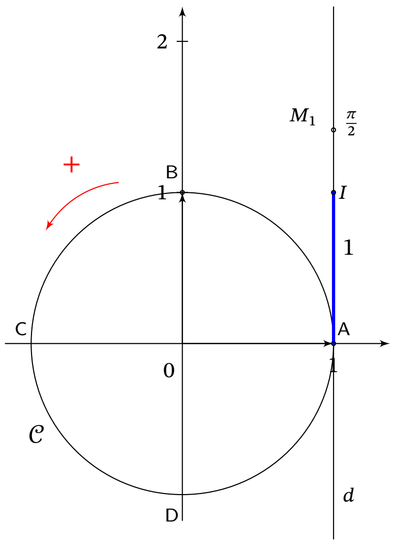


On définit 1 radian comme la mesure de l'angle qui intercepte le cercle $\mathcal{C}$ en un arc de mesure 1.
L'angle $\widehat{\mathrm{IOB}}$ a pour mesure 1 radian. La longueur de l'arc $\overset{\frown}{\mathrm{IB}}$ est égale à 1 et l'angle $\widehat{\mathrm{IOM}}$ a pour mesure x radians.

Méthode : Placer un point par enroulement autour du cercle trigonométrique

On considère la figure suivante, où $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique et la droite d, tangente à $\mathcal{C}$ en A, est munie du repère (A, I). Indiquer en quels points de cercle $\mathcal{C}$ se retrouvent après enroulement les points de la droite d suivant :

$M_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $M_2\left(\frac{3\pi}{2}\right)$;
$M_3\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;$M_4\left(5\pi\right)$;
$M_5\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; $M_6\left(\frac{5\pi}{4}\right)$;
$M_7\left(\frac{-13\pi}{4}\right)$.



Méthode : Placer un point sur le cercle trigonométrique

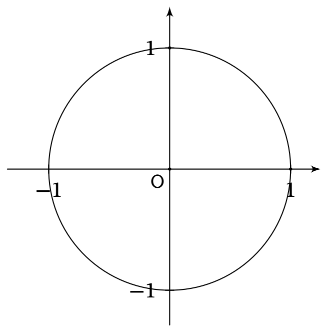
Placer sur le cercle trigonométrique :

1) Le point A associé au nombre $\frac{3\pi}{4}$.

2) Le point B associé au nombre $\frac{9\pi}{4}$.

3) Le point C associé au nombre $\frac{8\pi}{3}$.

4) Le point D associé au nombre $-\frac{9\pi}{2}$.



1.3 Conversion radians - degrés

Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés. D'où le tableau de proportionnalité :

mesures en degrés : d	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°	$\simeq$ 57°
mesure en radians : α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	1

Si α est la mesure de l'angle en radians et d celle en degrés, on a la relation : $180 \times \alpha = \pi \times d$.

Méthode : Passer du radian au degré et réciproquement

1) Donner la mesure en radians d'un angle de 33°.

2) Donner la mesure en degré d'un angle de $\frac{3\pi}{8}$ rad.

----

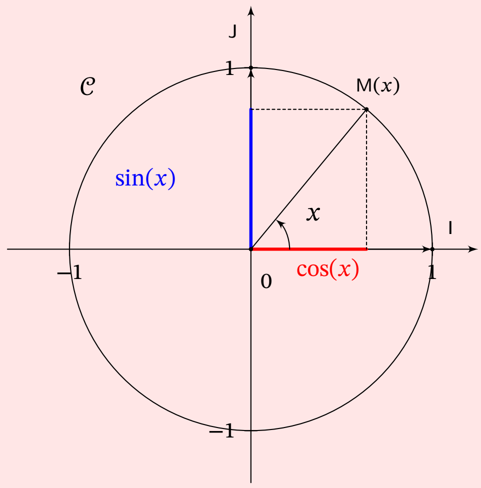
2 Cosinus et sinus d'un nombre réel

2.1 Définitions et propriétés

Définition : Cosinus et sinus d'un nombre réel

Soit x un réel et M son image sur le cercle trigonométrique :

- Le **cosinus de** x, noté $\cos(x)$, est **l'abscisse** du point M ;
- Le **sinus de** x, noté $\sin(x)$, est **l'ordonnée** du point M.



Propriété

Pour tout réel x et $k \in \mathbb{Z}$:

- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$;
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.

2.2 Cosinus et sinus des angles remarquables

x	$\cos(x)$	$\sin(x)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1
π	-1	0

Méthode : Lire en radians sur le cercle trigonométrique des valeurs de cos et sin

Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{6}$ et $\sin \frac{4\pi}{3}$.

---

3 La fonction cosinus

Définition

La fonction cosinus, notée cos, est la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\cos(x)$.

Propriété

La fonction cos est :

- paire : $\cos(-x) = \cos(x)$. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- 2π-périodique : $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ Sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Variations :
On déduit les variations de la fonction cos sur $\mathbb{R}$ de ses variations sur $[0\ ;\ \pi]$.
En effet, elle est 2π-périodiques et elle est paire.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	0	-1

4 La fonction sinus

Définition

La fonction sinus, notée sin, est la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\sin(x)$.

Propriété

La fonction sin est :

- impaire : $\sin(-x) = -\sin(x)$. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère ;
- 2π-périodique : $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Variations :
On déduit les variations de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ de ses variations sur $[0\ ;\ \pi]$.
En effet, elle est 2π-périodiques et elle est impaire.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	1	0

5 Les représentations graphiques