Parcours d'exercices

# Produit scalaire

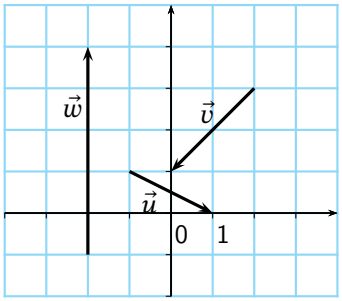
7

GÉOMÉTRIE

## 1 Rappels sur les vecteurs

**Exercice 1**

Lire graphiquement les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans le repère ci-dessous.




**Exercice 2**

Dans un repère, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -10,5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et les points $A(-1\ ;\ 2)$, $B(6\ ;\ 0)$ et $C(5\ ;\ -3)$.

1) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $-3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB} - 2\vec{u}$

2) Démontrer que $\vec{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

**Exercice 3**

À l'aide de la relation de Chasles, simplifier les expressions suivantes :

1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

**Exercice 4**

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} -14 \\ 28 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

**Exercice 5**

Déterminer si les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

1) $A(3\ ;\ -2)$, $B(-1\ ;\ -1)$, $C(-3\ ;\ 2)$ et $D(1\ ;\ 3)$

2) $A(-9\ ;\ -2)$, $B(1\ ;\ 3)$, $C(3\ ;\ -2)$ et $D(1\ ;\ -3)$

**Exercice 6**

Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

1) $A(-9\ ;\ 4)$, $B(1\ ;\ -1)$ et $C(4\ ;\ -2)$

2) $A(-4\ ;\ 0)$, $B(-2\ ;\ 1)$ et $C\left(3\ ;\ \frac{7}{2}\right)$

3) $A(-4\ ;\ 4)$, $B(-4\ ;\ 6)$ et $C(-3\ ;\ 2)$

**Exercice 7**

On considère deux points $A$ et $B$ dans le plan et le point $R$ tel que :

$$2\overrightarrow{AR} = 2\overrightarrow{RB} + \overrightarrow{AB}.$$

1) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.

2) Que peut-on en déduire concernant les points $A$, $B$ et $R$ ?

**Exercice 8**

On considère un triangle quelconque $ABC$.

1) Faire une figure.

2) On considère le point $M$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

a) En utilisant la relation de Chasles, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AM}$ à l'aide de vecteurs formés des points $A$, $B$ et $C$ uniquement.

b) Que peut-on dire des points $A$, $C$ et $M$ ?

c) Placer le point $M$ sur la figure.

**Exercice 9**

On considère un triangle $EFG$.

1) Faire une figure et y placer le point $H$ tel que :

$$\overrightarrow{EH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EF}.$$

2) En écrivant que $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH}$, démontrer que $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont colinéaires.

3) Que peut-on en déduire concernant le point $H$ ?

**Exercice 10**

$ABCD$ est un parallélogramme, $F$ est le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $E$ le point tel que $\overrightarrow{DE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$.

1) Montrer que $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$.
2) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ selon $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Démontrer que $(EF)$ et $(BD)$ sont parallèles.

**Exercice 11**

On considère un triangle $ABC$ et les points $D$ et $E$ tels que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$.
En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points $A$, $E$ et $D$ sont alignés.

**Exercice 12**

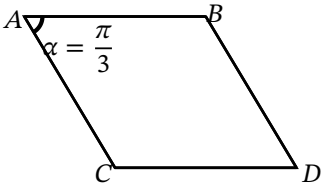
On considère trois points $F$, $G$ et $H$ du plan et les points $I$ et $J$ tels que $\overrightarrow{FI} = \overrightarrow{FG} + 3\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{HJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FG}$.
En utilisant une décomposition adaptée, montrer que les points $F$, $J$ et $I$ sont alignés.

## 2 Définition et propriétés

**Exercice 13**

Soit $ABDC$ un parallélogramme tel que $AB = 8$ et $AC = 10$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$.

Calculer :
1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.
3) $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$.




**Exercice 14**

On considère trois points $A$, $B$ et $C$ du plan tels que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.

1) Faire une figure.
2) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de $AB$, $BC$ et $AC$.
3) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Sésamath

**Exercice 15**

On considère trois points $E$, $F$ et $G$ du plan tels que $EF = 8$, $EG = 6$ et $FG = 11$. Calculer :

1) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{FG}$ 2) $\overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{GE}$ 3) $\overrightarrow{GF} \cdot \overrightarrow{FE}$

Sésamath

**Exercice 16**

On considère les vecteurs $\vec{a}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ et $\|\vec{a} + \vec{b}\|$.
2) En déduire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Sésamath

**Exercice 17**

Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$
2) $\vec{s} \cdot \vec{t}$ avec $\vec{s}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{t}\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$
3) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ avec $\vec{a}\begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \sqrt{3} + 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
4) $\vec{r} \cdot \overrightarrow{AB}$ avec $\vec{r}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $A(-1\ ;\ 2)$ et $B(-3\ ;\ 6)$
5) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{MR}$ avec $C(5\ ;\ 6)$, $D(-1\ ;\ 4)$, $M(3\ ;\ 7)$ et $R(8\ ;\ 9)$
6) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{EF}$ avec $E(0\ ;\ 1)$, $F(3\ ;\ 0)$, $S(8\ ;\ 8)$ et $T(5\ ;\ 5)$

Sésamath

**Exercice 18**

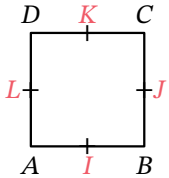
On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Calculer :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ 2) $(2\vec{u}) \cdot \vec{v}$ 3) $(-\vec{u}) \cdot (3\vec{v})$

Sésamath

**Exercice 19**



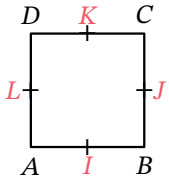

On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux des côtés.

Associer chacun des produits scalaires avec le calcul ou le résultat auquel il est égal.

- $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BL}$
- $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$
- $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{KL}$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{LK}$
- $-IB \times IA$
- $AB \times AI$
- $BC \times BJ$
- $0$

Sésamath

**Exercice 20**

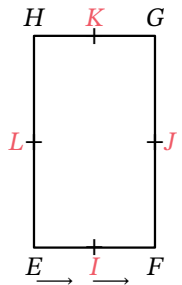



On considère le carré $ABCD$ ci-dessous de côté 1 et $I$, $J$, $K$ et $L$ les milieux des côtés.

1) Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ est un repère orthonormé et donner les coordonnées des points de la figure dans ce repère.
2) En déduire :
   a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AJ}$
   b) $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{JD}$
   c) $\overrightarrow{KJ} \cdot \overrightarrow{DL}$
   d) $\overrightarrow{DK} \cdot \overrightarrow{JA}$

Sésamath

**Exercice 21**



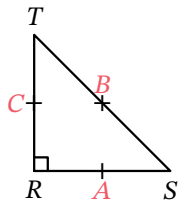

On considère le rectangle $EFGH$ ci-dessous, tel que $EF = 4$ et $EH = 7$, et les points $I$, $J$, $K$ et $L$, milieux respectifs des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[EH]$. En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1) $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH}$
2) $\overrightarrow{JL} \cdot \overrightarrow{EG}$
3) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{GH}$
4) $\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{EK}$
5) $\overrightarrow{IL} \cdot \overrightarrow{IG}$
6) $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{JK}$

Sésamath

**Exercice 22**

On considère le triangle isocèle et rectangle $RST$ ci-dessous, tel que $RS = RT = 4$, et les points $A$, $B$ et $C$, milieux respectifs des côtés $[RS]$, $[ST]$ et $[RT]$.




En choisissant un repère orthonormé adapté, calculer :

1) $\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{AC}$
2) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RS}$
3) $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{SA}$
4) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CB}$

Sésamath

**Exercice 23**

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec :

1) $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 6$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 10$
2) $\|\vec{u}\| = 3\sqrt{5}$ et $\vec{v} = \vec{u}$
3) $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}$
4) $\|\vec{u}\| = 8$ et $\vec{v} = -2\vec{u}$

Sésamath

**Exercice 24**

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ y \end{pmatrix}$ avec $x$ et $y$ réels.

1) Déterminer $x$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 11$.
2) Déterminer $y$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{w} = \sqrt{12}$.

Sésamath

**Exercice 25**

D'après le cours, si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
La réciproque de cette propriété est-elle vraie ? Justifier.

Sésamath

**Exercice 26**

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ 3 \end{pmatrix}$ avec $x$ réel.
Déterminer, si elle(s) existe(nt), pour quelle(s) valeur(s) de $x$, on a :

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$
2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -10$
3) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$
4) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 7$

Sésamath

## 3 Propriétés algébriques

**Exercice 27**

On considère trois points $A$, $B$ et $C$ du plan tels que $AB = 2$, $AC = 6$ et $BC = 7$.

1) a) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}\right)$.
   b) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2) En utilisant la méthode précédente, calculer :
   a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$
   b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$

Sésamath

**Exercice 28**

Développer puis exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

1) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (5\vec{u} + 4\vec{v})$
2) $(5\vec{u} - 4\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$
3) $(-3\vec{u} + 6\vec{v}) \cdot (-\vec{u} - 5\vec{v})$
4) $(-\vec{u} - 5\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 6\vec{v})$

Sésamath

**Exercice 29**

On sait que cinq points du plan $A$, $B$, $C$, $D$ et $E$ vérifient :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = 2$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ED} = -4$
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$

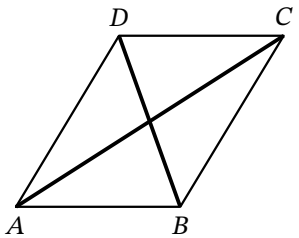
Déterminer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$.

Sésamath

**Exercice 30 : Identité de polarisation**

L'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$ est appelée identité de polarisation.

On considère un parallélogramme $ABCD$ dont les diagonales ont pour longueur $AC = 7$ et $BD = 4$.




1) En utilisant l'identité de polarisation, justifier que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\left(AC^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}\|^2\right).$$

2) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Sésamath

# 4 Orthogonalité

**Exercice 31**

On considère les points $A(1\ ;\ 3)$, $B(3\ ;\ 1)$, $C(-2\ ;\ -2)$, $D(13\ ;\ -5)$ et $E(4\ ;\ 3)$.

1) Les droites $(AC)$ et $(AB)$ sont-elles perpendiculaires ?

2) Même question pour : $(AC)$ et $(BD)$.

Sésamath

**Exercice 32**

On considère quatre points $J(6\ ;\ 1)$, $K(2\ ;\ 4)$, $L(1\ ;\ -5)$ et $M\left(-\frac{5}{2}\ ;\ -2\right)$.

1) Le triangle $JKL$ est-il rectangle en $J$ ?

2) Le triangle $JKM$ est-il rectangle ?

Sésamath

**Exercice 33**

On considère trois points $A(\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{7})$, $B(\sqrt{2}\ ;\ \sqrt{3})$ et $C(-\sqrt{6}\ ;\ \sqrt{7}+2\sqrt{3})$.
Montrer que $ABC$ est rectangle en $B$.

Sésamath

**Exercice 34**

On considère quatre points $Q(2\ ;\ -2)$, $R(1\ ;\ 1)$, $S(4\ ;\ 2)$ et $T(5\ ;\ -1)$.
Déterminer la nature du quadrilatère $QRST$.

Sésamath

**Exercice 35**

On considère trois points $A(5,2\ ;\ 4)$, $B(6\ ;\ 3,1)$ et $C(1\ ;\ y)$.
Déterminer $y$ tel que $ABC$ soit rectangle en $A$.

Sésamath

**Exercice 36**

Associer chacune des égalités vectorielles suivantes :

- $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AM}=0$
- $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$
- $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$ où $k$ décrit $\mathbb{R}_+$
- $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}=0$

à l'ensemble des points $M$ qui lui correspond :

- la demi-droite $[AB)$
- la hauteur issue de $C$ dans $ABC$
- le cercle de diamètre $[AB]$
- la perpendiculaire à $[BC]$ passant par $A$

Sésamath

**Exercice 37**

Déterminer, si possible, la ou les valeurs de $m$ pour lesquelles les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ m \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2m \\ 6 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u}\begin{pmatrix} m^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ m-4 \end{pmatrix}$

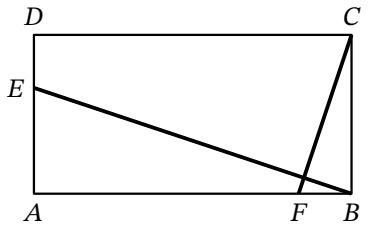
4) $\vec{u}\begin{pmatrix} m \\ m^2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ m \end{pmatrix}$

5) $\vec{u}\begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ m \end{pmatrix}$

Sésamath

**Exercice 38**

On considère le rectangle $ABCD$ ci-dessous tel que $AB=6$ et $AD=3$, $E\in[AD]$ avec $AE=2$ et $F\in[AB]$ avec $AF=5$.

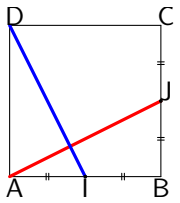



Montrer que les droites $(FC)$ et $(BE)$ sont perpendiculaires.

Sésamath

**Exercice 39**

Soit $ABCD$ un carré de côté 2.
Les points $I$ est $J$ sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.
Montrer ques les droites (AJ) et (ID) sont perpendiculaires.




Sésamath

# 5 Produit scalaire et angles

**Exercice 40**

On considère un triangle $ABC$ avec $AB=5$ et $BC=6$ et $\widehat{ABC}=60°$.

1) Faire une figure.

2) Calculer $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

3) Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.
On remarquera d'abord que $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$.

Sésamath

**Exercice 41**

On considère trois points $R(-1\ ;\ -2)$, $S(5\ ;\ -4)$ et $T(3\ ;\ 6)$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{RS}\cdot\overrightarrow{RT}$, $RS$ et $RT$.

   b) En déduire $\cos\left(\widehat{SRT}\right)$ puis une mesure de $\widehat{SRT}$, arrondie à $0,01$ degré près.

Sésamath

2) Déterminer de même une mesure de $\widehat{RST}$.

3) En déduire $\widehat{STR}$.

**Exercice 42**

On considère un triangle $OMN$ tel que $OM = 5$, $ON = 8$ et $\widehat{MON} = \dfrac{\pi}{4}$ radians.

Déterminer $MN$ (on pourra d'abord calculer $\overrightarrow{MN}^2$ en utilisant la relation de Chasles).

Sésamath

**Exercice 43**

On considère trois points $I$, $J$ et $K$ du plan tels que $IJ = 4$, $IK = 5$ et $JK = 8$.

1) Faire une figure.

2) Montrer que $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI}\cdot\overrightarrow{IJ}$.

3) En déduire $\overrightarrow{IJ}\cdot\overrightarrow{IK}$.

4) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{JIK}$, arrondi à $0,1$ près.

Sésamath

**Exercice 44**

On considère trois points $A$, $B$ et $C$ du plan tels que $AB = 7$, $BC = 8$ et $AC = 12$.

1) a) Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire une mesure de $\widehat{A}$, arrondi à $0,1$ près.

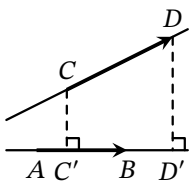
2) Déterminer $\widehat{B}$ puis $\widehat{C}$.

Sésamath

# 6 Produit scalaire et projection

**Exercice 45**

Soit $C$ et $D$ deux points distincts, extérieurs à une droite $(AB)$ et $C'$ et $D'$ les projetés orthogonaux respectifs de $C$ et $D$ sur $(AB)$.




1) Montrer l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{D'D}.$$

2) En déduire que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{C'D'}$.

Sésamath

**Exercice 46**

On considère trois points $A(-1\ ;\ 1)$, $B(2\ ;\ 2)$ et $C(0\ ;\ 7)$ et $B'$, le pied de la hauteur issue de $B$ dans $ABC$.

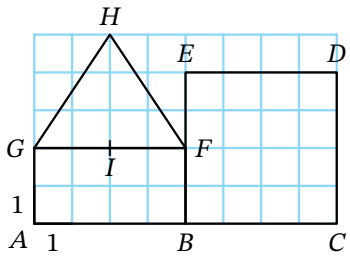
1) Exprimer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ en fonction de $CB'$.

2) En déduire $CB'$ puis $BB'$.

3) Calculer l'aire de $ABC$.

Sésamath

**Exercice 47**




En utilisant des projections, calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

2) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BI}$

3) $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}$

4) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{FH}$

5) $\overrightarrow{HG}\cdot\overrightarrow{BC}$

6) $\overrightarrow{GI}\cdot\overrightarrow{FD}$

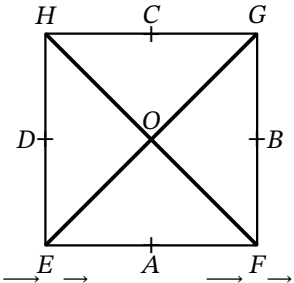
Sésamath

# 7 Choisir la bonne formule

**Exercice 48**

On considère le carré $EFGH$ de côté $a$ ci-dessous. Dans ce carré, $A$ est le milieu de $[EF]$, $B$ le milieu de $[FG]$, $C$ le milieu de $[GH]$, $D$ le milieu de $[HE]$ et $O$ est le centre de $EFGH$.

En utilisant la méthode de votre choix, exprimer les produits scalaires suivants en fonction de $a$ :




1) $\overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{HF}$

2) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{EB}$

3) $\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{GE}$

4) $\overrightarrow{EO}\cdot\overrightarrow{FE}$

5) $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{FH}$

6) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CA}$

7) $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OB}$

8) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CO}$

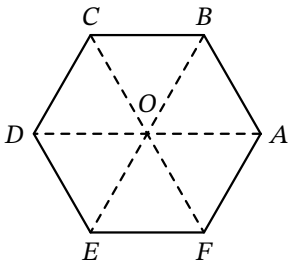
9) $\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EG}$

Sésamath

**Exercice 49**

On considère l'hexagone régulier $ABCDEF$ de centre $O$ et de côté 1 ci-dessous.

En utilisant la méthode de votre choix, calculer les produits scalaires suivants :



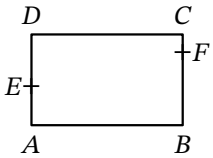

1) $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{FO}$
2) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
3) $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OF}$
4) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{FA}$
5) $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OD}$
6) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{FB}$
7) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DF}$
8) $\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CA}$
9) $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{CO}$

Sésamath

**Exercice 50**

On considère un rectangle $ABCD$ avec $AB = 5$ et $AD = 3$, $E$ un point quelconque de $[AD]$ et $F$ un point quelconque de $[BC]$.

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EF}$.
2) Soit $G$ un point de $[CD]$.
   a) Exprimer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG}$ en fonction de $DG$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{GF}$ en fonction de $BF$.

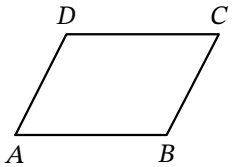



Sésamath

**Exercice 51**

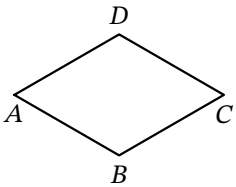
1) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 4$, $AD = 3$ et $AC = 6$.

   Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$.



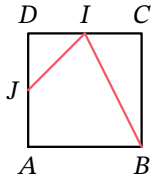

2) $ABCD$ est un losange de côté 4 et vérifiant $\widehat{BAD} = 60°$.

   Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.




3) $ABCD$ est un carré de côté 1 et $I$ est le milieu de $[DC]$ et $J$ celui de $[AD]$.

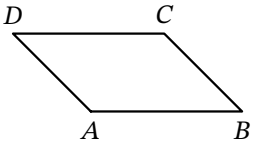
   Calculer $\overrightarrow{JI} \cdot \overrightarrow{BI}$.




4) $ABCD$ est un parallélogramme avec $AB = 5$ et $BD = 8$ et $\widehat{ABD} = 20°$.

   Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$.

   Arrondir à 0,1 près.

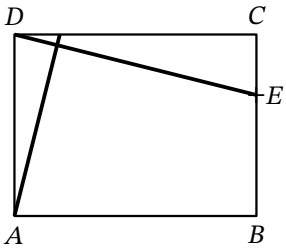



Sésamath

# 8 Problèmes et approfondissement

**Exercice 52**

On considère le rectangle $ABCD$ tel que $AB = 4$ et $AD = 3$ ci-dessous avec $E \in [CB]$ tel que $EC = 1$.




On cherche à déterminer où placer le point $F$ de $[CD]$ tel que $(DE)$ et $(AF)$ soient perpendiculaires.

Pour cela, nous allons utiliser deux méthodes, l'une analytique, l'autre géométrique.

Méthode analytique

1) Donner les coordonnées de $A$, $D$ et $E$ dans le repère $\left(A\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)$.
2) a) Soit $F(x\ ;\ y)$.

   Donner une condition sur $y$ pour que $F$ appartiennent bien à $(CD)$.

   b) Justifier que $(DE) \perp (AF) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 4x - 3 = 0 \end{cases}$.

   c) En déduire où placer $F$ sur $[CD]$ pour que $(DE)$ et $(AF)$ soient perpendiculaires.

Méthode géométrique

1) Montrer que $\left(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}\right) = 4DF - 3$.
2) En déduire que le point $F$ de $[CD]$ tel que $(DE)$ et $(AF)$ soient perpendiculaires vérifie $DF = \frac{3}{4}$.

Sésamath

**Exercice 53**

On considère trois points $A(1\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ 1)$ et $C(2\ ;\ 5)$.

1) Faire une figure.
2) Montrer que $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$.
3) En déduire que $\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$.
4) Tracer $C'$ le pied de la hauteur issue de $C$ sur $(AB)$ et montrer que $CC' = \frac{7\sqrt{10}}{5}$.
5) En déduire l'aire de $ABC$.
6) a) Tracer le rectangle de sommets les points de coordonnées $(1\ ;\ 0)$, $(4\ ;\ 0)$, $(4\ ;\ 5)$ et $(1\ ;\ 5)$.

   b) Retrouver la réponse à la question précédente.

Sésamath

(Correction)

**Corrigé de l'exercice 1**

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Corrigé de l'exercice 2**

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

2) $-3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -21 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}-2\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\vec{v}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

**Corrigé de l'exercice 3**

1) $\vec{0}$

2) $2\overrightarrow{AD}$

**Corrigé de l'exercice 4**

1) Oui

2) Oui

3) Non

**Corrigé de l'exercice 5**

1) $(AB)$ et $(CD)$ ne sont pas parallèles.

2) $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

**Corrigé de l'exercice 6**

1) $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

2) $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

3) $A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés.

**Corrigé de l'exercice 7**

1) $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

2) Ils sont alignés mais il faut le justifier.

**Corrigé de l'exercice 8**

1) Faites-là !

2) a) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

   b) Ils sont alignés mais il faut le justifier.

   c) La figure doit être cohérente avec la réponse précédente.

**Corrigé de l'exercice 9**

1) Faites-là !

2) On montre que $\overrightarrow{FH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FG}$ ce qui prouve la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{FH}$ et $\overrightarrow{FG}$.

3) Le point $H$ est sur la droite $(FG)$.

**Corrigé de l'exercice 10**

1) On peut partir de $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$.

2) $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

3) En utilisant les deux égalités vectorielles précédentes, exprimez le vecteur $\overrightarrow{EF}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BD}$.

**Corrigé de l'exercice 11**

Il faut montrer que les vecteurs (par exemple) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.

**Corrigé de l'exercice 12**

Il faut montrer que les vecteurs (par exemple) $\overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{FJ}$ sont colinéaires.

**Corrigé de l'exercice 13**

1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=40$.

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=64$.

3) $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CD}=-40$.

**Corrigé de l'exercice 14**

1) Faites-là.

2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-BC^2)$.

3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-10$

**Corrigé de l'exercice 15**

1) $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{FG}=-74,5$

2) $\overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{GE}=-46,5$

3) $\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{FE}=-74,5$

**Corrigé de l'exercice 16**

1) $\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{40}$, $\left\|\vec{b}\right\|=\sqrt{34}$ et $\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|=\sqrt{122}$.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=24$.

**Corrigé de l'exercice 17**

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=18$

2) $\vec{s}\cdot\vec{t}=11$

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5$

4) $\vec{r}\cdot\overrightarrow{AB}=22$

5) $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{MR}-34$

6) $\overrightarrow{ST}\cdot\overrightarrow{EF}=-6$

**Corrigé de l'exercice 18**

1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=18$ 2) $(2\vec{u})\cdot\vec{v}=36$ 3) $(-\vec{u})\cdot(3\vec{v})=-54$

**Corrigé de l'exercice 19**

**Corrigé de l'exercice 20**

1) Le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ convient.
   Dans ce repère $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(1\ ;\ 1)$, $D(0\ ;\ 1)$, $I\left(\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$, $J\left(1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$, $K\left(\frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$ et $L\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.
2) a) 1
   b) $-\frac{3}{4}$
   c) $\frac{1}{4}$
   d) $-\frac{1}{2}$

**Corrigé de l'exercice 21**

**Corrigé de l'exercice 22**

Repère $\left(R\ ;\ \frac{1}{4}\overrightarrow{RS}\ ,\ \frac{1}{4}\overrightarrow{RT}\right)$.

1) $\overrightarrow{RT} \cdot \overrightarrow{AC} = 8$
2) $\overrightarrow{ST} \cdot \overrightarrow{RS} = -16$
3) $\overrightarrow{CS} \cdot \overrightarrow{SA} = -8$
4) $\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{CB} =$

**Corrigé de l'exercice 23**

1) $\frac{39}{2}$
2) 45
3) 30
4) $-5$
5) $-128$

**Corrigé de l'exercice 24**

1) $x = -\frac{1}{2}$
2) $y = \frac{8\sqrt{3}}{7}$

**Corrigé de l'exercice 25**

Non. Trouver un contre exemple.

**Corrigé de l'exercice 26**

1) $x = -3$
2) Aucune valeur
3) $x = -3 + \sqrt{11}$ et $x = -3 - \sqrt{11}$
4) $x \in ]-\infty\ ;\ -7[\cup]1\ ;\ +\infty[$

**Corrigé de l'exercice 27**

1) a) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.
   b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4,5$.
2) a) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 8,5$
   b) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 40,5$

**Corrigé de l'exercice 28**

1) $\left(3\vec{u} + 2\vec{v}\right) \cdot \left(5\vec{u} + 4\vec{v}\right) = 15\left\|\vec{u}\right\|^2 + 22\vec{u} \cdot \vec{v} + 8\left\|\vec{v}\right\|^2$
2) $\left(5\vec{u} - 4\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \vec{v}\right) = 5\left\|\vec{u}\right\|^2 - 4\left\|\vec{v}\right\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v}$
3) $\left(-3\vec{u} + 6\vec{v}\right) \cdot \left(-\vec{u} - 5\vec{v}\right) = 3\left\|\vec{u}\right\|^2 - 30\left\|\vec{v}\right\|^2 + 9\vec{u} \cdot \vec{v}$
4) $\left(-\vec{u} - 5\vec{v}\right) \cdot \left(3\vec{u} - 6\vec{v}\right) = -3\left\|\vec{u}\right\|^2 + 30\left\|\vec{v}\right\|^2 - 9\vec{u} \cdot \vec{v}$

**Corrigé de l'exercice 29**

Utilisez la relation de Chasles en écrivant $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED}$.
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -7$

**Corrigé de l'exercice 30**

1) On utilise l'identité de polarisation avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$
2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 8,25$.

**Corrigé de l'exercice 31**

1) $(AC)$ et $(AB)$ ne sont pas perpendiculaires.
2) a) $(AC)$ et $(BD)$ sont perpendiculaires.
   b) $(BE)$ et $(CD)$ ne sont pas perpendiculaires.

**Corrigé de l'exercice 32**

1) Non
2) Oui

**Corrigé de l'exercice 33**

Calculez $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$

**Corrigé de l'exercice 34**

C'est un carré. Il faut le démontrer.

**Corrigé de l'exercice 35**

$y = \frac{4}{15}$

**Corrigé de l'exercice 36**

**Corrigé de l'exercice 37**

1) $m = 0$
2) Aucune valeur
3) $\frac{4}{3}$ et $-2$
4) $0, 1$ et $-1$
5) Aucune valeur

**Corrigé de l'exercice 38**

On peut utiliser un repère orthonormé et montrer que $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$.
On peut aussi montrer que $\overrightarrow{EB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
$\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BE} = \left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \ldots = 0$.

**Corrigé de l'exercice 39**

On procède comme dans l'exercice précédent.

**Corrigé de l'exercice 40**

1) Faites-là.
2) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 15$.
3) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 21$.

**Corrigé de l'exercice 41**

1) a) $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{RT} = 8$, $\left\|\overrightarrow{RS}\right\| = 2\sqrt{10}$ $\left\|\overrightarrow{RT}\right\| = 4\sqrt{5}$
   b) $\cos\left(\widehat{SRT}\right) = \frac{1}{5\sqrt{2}}$
   donc $\widehat{SRT} \approx 81,87°$.
2) $\widehat{RST} \approx 60,26°$
3) $\widehat{STR} \approx 37,87$

**Corrigé de l'exercice 42**

$MN = \sqrt{89 - 40\sqrt{2}}$

**Corrigé de l'exercice 43**

1) Faites-là.
2) $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{KI}$.
3) $\vec{IJ} \cdot \overrightarrow{IK} = -11,5$.
4) $\widehat{JIK} \simeq 125,1°$

**Corrigé de l'exercice 44**

1) a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 64,5$.
   b) $\widehat{A} \simeq 39,8°$.
2) $\widehat{B} \simeq 106,1°$ puis $\widehat{C} \simeq 34,1°$.

**Corrigé de l'exercice 45**

1) Utilisez a relation de Chasles.
2) Utilisez l'égalité précédente.

**Corrigé de l'exercice 46**

1) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \sqrt{37}CB'$.
2) $CB' = \dfrac{28}{\sqrt{37}}$ puis $BB' = \dfrac{17\sqrt{37}}{37}$.
3) L'aire de $ABC$ est $8,5$ u.a.

**Corrigé de l'exercice 47**

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 32$
2) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BI} = -8$
3) $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = 16$
4) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{FH} = 12$
5) $\overrightarrow{HG} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$
6) $\overrightarrow{GI} \cdot \overrightarrow{FD} = 8$

**Corrigé de l'exercice 48**

1) $\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{HF} = a^2$
2) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EB} = a^2$
3) $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{GE} = \dfrac{1}{2}a^2$
4) $\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{FE} = -\dfrac{1}{2}a^2$
5) $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{FH} = 0$
6) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}a^2$
7) $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} = -\dfrac{1}{4}a^2$
8) $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CO} = \dfrac{1}{4}a^2$
9) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EG} = \dfrac{1}{2}a^2$

**Corrigé de l'exercice 49**

**Corrigé de l'exercice 50**

**Corrigé de l'exercice 51**

**Corrigé de l'exercice 52**

**Corrigé de l'exercice 53**