Chapitre 8

Applications de la dérivation

Les savoir-faire

230. Connaître le lien entre le signe de f' et le sens de variation de f.

231. Etudier les variations d'une fonction.

232. Utiliser les variations d'une fonction pour obtenir ses extrema, obtenir des inégalités, résoudre un problème d'optimisation,.....

I. Sens de variation et dérivation

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

• Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) \geqslant 0$$

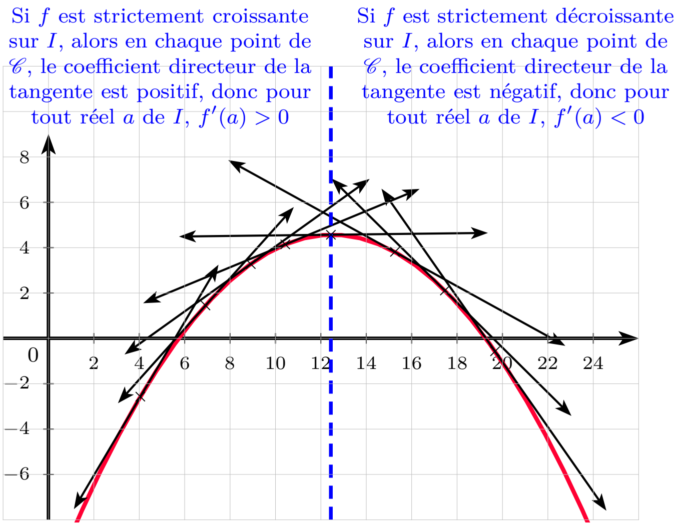
• Si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) \leqslant 0$$

• Si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I,

$$f'(x) = 0$$

Interprétation graphique



Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.

• Si pour tout réel x de I on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Remarque :
Pour étudier les variations d'une fonction, on étudie le signe de sa dérivée.

Exemple :
Déterminer les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + \dfrac{9}{2}x^2 - 12x + 5$. Vidéo

II. Extremum d'une fonction

1. Maximum, minimum

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
• On dit que le réel M est **le maximum de f sur I** atteint en a, si $f(a) = M$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \leqslant M$.

• On dit que le réel m est **le minimum de f sur I** atteint en b, si $f(b) = m$ et si pour tout réel x de I, on a $f(x) \geqslant m$.

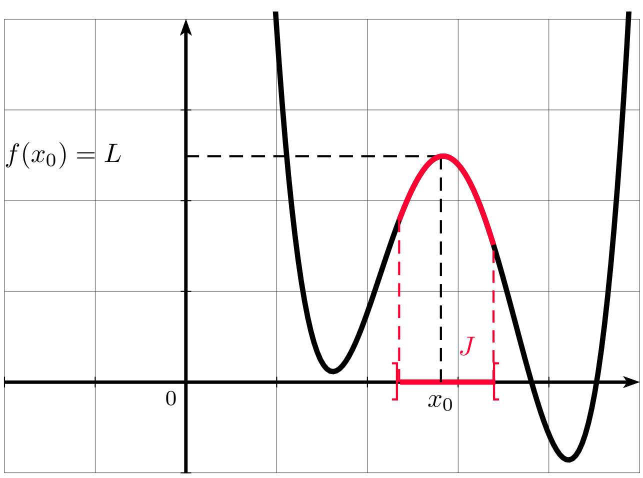
• Un **extremum de f sur I** est un maximum ou un minimum.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$.
Déterminer l'extremum de la fonction f. Vidéo

2. Extremum local

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I. Dire que L est un **maximum (respectivement minimum) local** de f sur I s'il existe un intervalle ouvert J contenu dans I, tel que L est le maximum (respectivement minimum) de f sur J.



L est un maximum local de f

3. Lien dérivée/Extremum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si f admet un extremum local en $x_0 \in I$, alors on a $f'(x_0) = 0$.

Remarque :
La réciproque de ce théorème est fausse.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Soit $x_0 \in I$.
Si $f'(x_0) = 0$ **et si** f' change de signe en x_0, alors f admet un extremum local en x_0.