Probabilités : variables aléatoires

www.mathGM.fr

Lycée Louise Michel (Gisors)

Les savoir-faire

420. Interpréter et utiliser les notations $\{X = a\}$, $\{X < a\}$, $P(X = a)$, $P(X < a)$.
421. Modéliser une situation avec une variable aléatoire.
422. Calculer une espérance, une variance, un écart type.
423. Utiliser la notion d'espérance dans la résolution d'un problème.

Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$, on dit que l'on définit une loi de probabilité.

Variable aléatoire et loi de probabilité

Définition

Lorsqu'à chaque évènement élémentaire d'une expérience aléatoire, on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire**.

Définition

Lorsqu'à chaque valeur x_i (avec $1 \leqslant i \leqslant n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'évènement $(X = x_i)$, on dit que l'on définit une loi de probabilité.

Exemple 1 Vidéo

On lance un dé à 6 faces.
Si le résultat est pair, on gagne 2 €.
Si le résultat est 1, on gagne 3€.
Si le résultat est 3 ou 5, on perd 4 €.
Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le gain à ce jeu.

Définitions

Définitions

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec des des probabilités respectives p_1,...,p_n.

Définitions

Définitions

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec des des probabilités respectives p_1,...,p_n.

1. L'**espérance mathématique** de X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

Définitions

Définitions

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec des des probabilités respectives p_1,...,p_n.

1. L'**espérance mathématique** de X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :
$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1+p_2x_2+\ldots+p_nx_n$$
2. La **variance** de X est le nombre noté $V(X)$, défini par :
$$V(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i-E(X))^2 = p_1(x_1-E(X))^2 + p_2(x_2-E(X))^2+\ldots+p_n(x_n-E(X))^2$$

Définitions

Définitions

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire et X une variable aléatoire définie sur Ω prenant n valeurs x_1, x_2, ..., x_n avec des des probabilités respectives p_1,...,p_n.

1. L'**espérance mathématique** de X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$
2. La **variance** de X est le nombre noté $V(X)$, défini par :
$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n(x_n - E(X))^2$$
3. L'**écart-type** de X est le nombre, noté $\sigma(X)$, défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarques et exemple

Remarques

• L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.

• Le mot « espérance »vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Un jeu est dit équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.

• Une autre formule de la variance est $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Remarques et exemple

Remarques

• L'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i.
• Le mot « espérance »vient du langage des jeux : lorsque X désigne le gain, $E(X)$ est le gain moyen que peut espérer un joueur sur un grand nombre de parties. Un jeu est dit équitable lorsque l'espérance de gain est nulle.
• Une autre formule de la variance est
$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

Exemple 2

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Si on tire un coeur, on gagne 2 €.
Si on tire un roi, on gagne 5€.
Si on tire une autre carte, on perd 1 €.
X est la variable aléatoire donnant le gain du jeu. Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X. Vidéo1 Vidéo2