Chapitre 10

Suites arithmétiques et géométriques

Les savoir-faire

140. Déterminer le sens de variation d'une suite.

141. Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique.

142. Conjecturer la limite éventuelle d'une suite.

I. Sens de variation d'une suite

1. Définition

Définition

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si et seulement si : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- On dit qu'une suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- On dit que la suite (u_n) est **constante** si et seulement si pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Exemples :

1. On donne la suite u définie par $u_n = n^2 - 4n + 4$. Vidéo

Démontrer que la suite u est croissante à partir d'un certain rang.

2. On donne la suite u définie par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Démontrer que la suite u est décroissante. Vidéo

2. Variations d'une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :
- si $r > 0$, u est strictement croissante ;
- si $r < 0$, u est strictement décroissante ;
- si $r = 0$, u est constante.

Exemples :

Etudier les variations des suites arithmétiques u et v définies par :

a. $u_n = 3 + 5n$.

b. $\begin{cases} v_{n+1} = v_n - 4 \\ v_0 = -3 \end{cases}$ Vidéo

3. Variations d'une suite géométrique

Suites géométriques

Soit u une suite géométrique de raison q telle que $q > 0$, $q \neq 0$ et $q \neq 1$.

Pour $u_0 > 0$:
- si $0 < q < 1$, u est strictement décroissante ;
- si $q > 1$, u est strictement croissante ;
- si $q = 1$, u est constante.

Pour $u_0 < 0$:
- si $0 < q < 1$, u est strictement croissante ;
- si $q > 1$, u est strictement décroissante ;
- si $q = 1$, u est constante.

Exemples :
Etudier les variations des suites géométriques u et v définies par :

a. $u_n = -4 \times 2^n$.

b. $\begin{cases} v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n \\ v_0 = -2 \end{cases}$ Vidéo

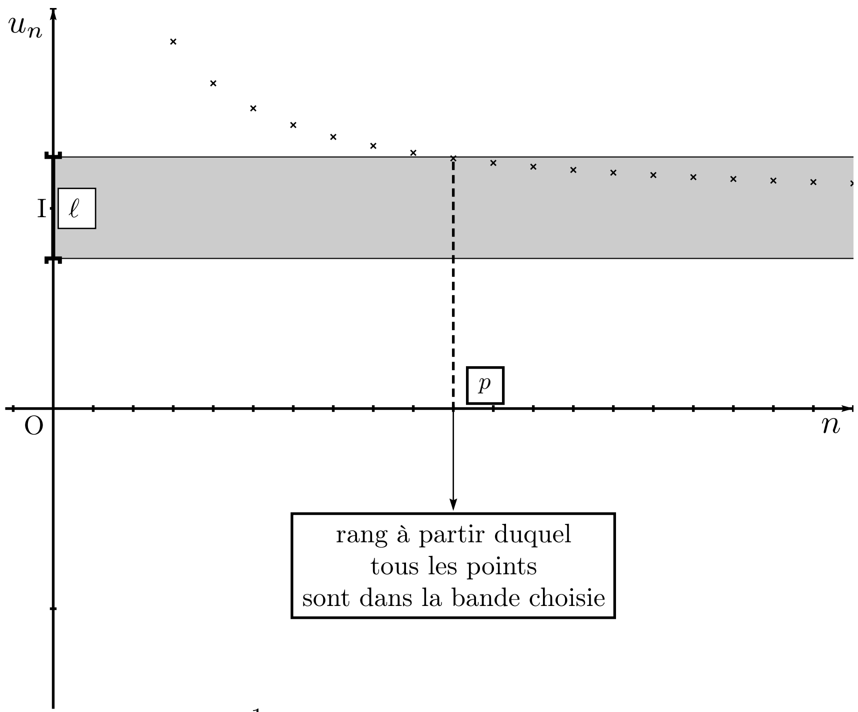
II. Notion de limite

1. Approche

S'intéresser à la limite d'une suite u, c'est étudier le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes. Des exemples nous permettent de conjecturer diverses situations.

2. Suites ayant pour limite un nombre réel

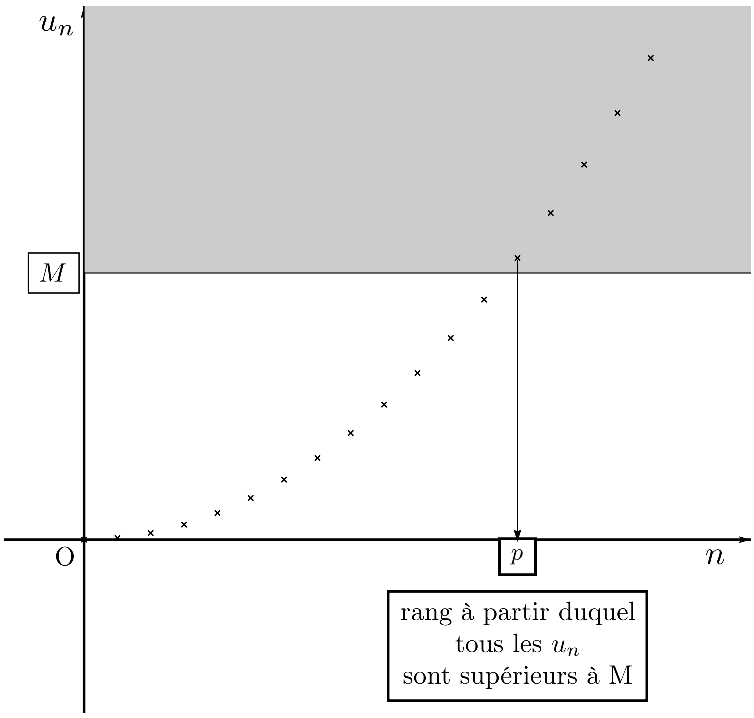
Une suite u a pour limite un nombre réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, si tous les termes u_n deviennent aussi proches de ℓ que l'on veut, à condition de prendre n suffisamment grand.



Exemple :
$u_n = \dfrac{1}{n}$: sa limite est 0 (on peut rendre $\dfrac{1}{n}$ aussi proche de 0 que l'on veut à condition de prendre n suffisamment grand).

3. Suites ayant pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$)

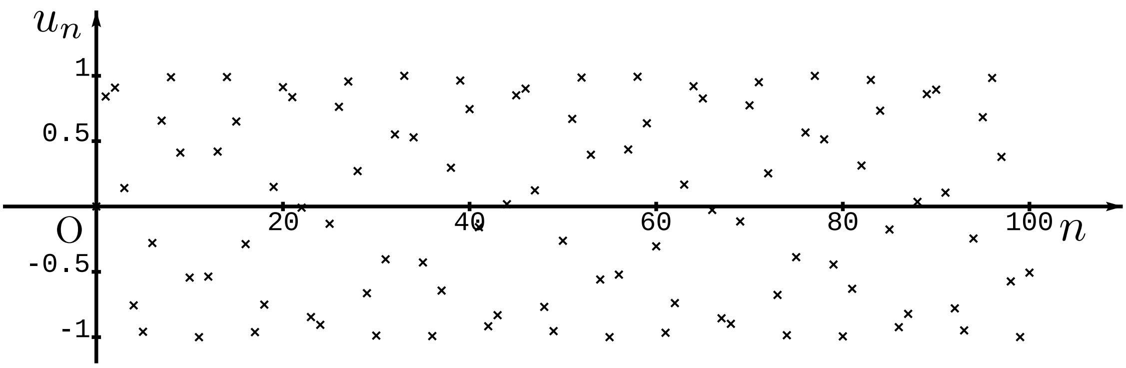
Une suite u a pour limite $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, si ses termes u_n deviennent aussi grand que l'on veut à condition de prendre n suffisamment grand.



Exemple :
$u_n = n^2$. Sa limite est $+\infty$. Pour tout réel M, on peut rendre $n^2 \geqslant M$ à condition de prendre n suffisamment grand.

4. Suites n'ayant pas de limite

Certaines suites n'ont pas de limite.
Par exemple, la suite u définie par $u_n = \sin n$ pour $n \geqslant 0$ et représentée ci-dessous n'a pas de limite quand n tend vers $+\infty$.



Exemples :
On considère les suites u et v définies par :
$u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ et $v_n = n^2 + 1$.
Conjecturer les limites de ces deux suites. Vidéo