MATHEMATIQUES
Dérivation (1) : sujet d'entraînement 1 (corrigé)

Exercice 1

- PARTIE A : lectures graphiques -

1. $f(-2) = 4$.
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a :

• En se décalant d'une unité vers la droite à partir du point A, on descend de 7 unités pour retrouver un point de la droite. Ainsi :$f'(-2) = -7$.

• La tangente au point d'abscisse -1 (le point B) est horizontale. Sa pente est donc nulle. Ainsi, $f'(-1) = 0$.

• En se décalant d'une demi unité vers la droite à partir du point C, on descend de 2 unités pour retrouver un point de la droite. Ainsi :$f'(-2) = \dfrac{\text{"Déplacement vertical"}}{\text{"Déplacement horizontal"}} = \dfrac{-2}{0,5} = -4$.

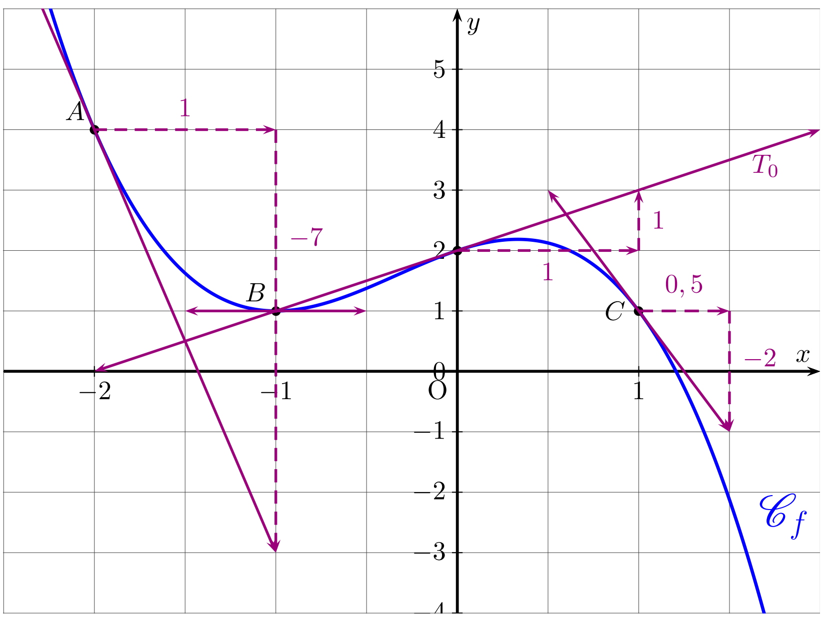
2. Le coefficient directeur de la tangente est donné par le nombre dérivé. En -2, le coefficient directeur de la tangente est -7.

$$T_{-2}\ :\ y = -7x + p$$

Le point $A(-2\ ;\ 4)$ est sur T_{-2}, donc ses coordonnées vérifient l'équation.
$4 = -7 \times (-2) + p$ soit $p = -10$. On en déduit :

$$T_{-2}\ :\ y = -7x - 10$$

3.



Graphiquement $\mathscr{C}_f$ est au dessus de T_0 sur $]-\infty\ ;\ -1[$ et en dessous de T_0 sur $]-1\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$.

4. $f'(x) = 0$ lorsque la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale. On a $x_1 = -1$ et $0 < x_2 < 0,5$.

Explications
Si $a < x < b$, l'amplitude de l'encadrement est $b - a$. Ici, $0,5 - 0 = 0,5$, on a bien un encadrement d'amplitude 0,5.

- PARTIE B : utilisation de l'expression algébrique -

1. La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

L'équation $-3x^2 - 2x + 1 = 0$ admet deux solutions :

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{1}{3}$$

Explications

On trouve les racines du polynôme $-3x^2 - 2x + 1$ avec $\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 16$.

$x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times (-3)} = -1$

$x_2 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times (-3)} = \dfrac{1}{3}$

2. **a.** $T_0 \ : \ y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.
$f'(0) = 1$ et $f(0) = 2$. Par conséquent $T_0 \ : \ y = x + 2$.

b.
$$\begin{aligned} f(x) - (x+2) &= 2 + x - x^2 - x^3 - (x+2) \\ &= -x^2 - x^3 \\ &= x^2(-1 - x) \end{aligned}$$

c. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T_0, on étudie le signe de la différence :

$$f(x) - (x+2)$$

Or, d'après la question précédente, $f(x) - (x+2) = x^2(-1 - x)$. On en déduit le signe à l'aide d'un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
Signe de x^2		$+$	|	$+$	0	$+$	
Signe de $-1 - x$		$+$	0	$-$	|	$-$	
Signe de $x^2(-1 - x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
Position relative		$\mathscr{C}_f \succ T_0$	|	$\mathscr{C}_f \prec T_0$	|	$\mathscr{C}_f \prec T_0$	

Exercice 2

1. **a.** Calcul du taux d'accroissement de f entre a et $a + h$:

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \frac{(-2(a+h)^2 + (a+h) - 2) - (-2a^2 + a - 2)}{h} \\ &= \frac{\cancel{-2a^2} - 4ah - 2h^2 + \cancel{a} + h - \cancel{2} + \cancel{2a^2} - \cancel{a} + \cancel{2}}{h} \\ &= \frac{-2h^2 - 4ah + h}{h} \\ &= \frac{\cancel{h}(-2h - 4a + 1))}{\cancel{h}} = -2h - 4a + 1 \end{aligned}$$

b. $\lim\limits_{h \to 0} -2h - 4a + 1 = -4a + 1 \in \mathbb{R}$. Donc la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = -4a + 1$.

2. Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
$f'(1) = -4 \times 1 + 1 = -3$ et $f(1) = -2 \times 1 + 1 - 2 = -3$.
On en déduit $y = -3(x-1) + (-3)$ soit $y = -3x$.

Lorsque $x = 4$, $y = -12$, le point A n'est pas sur la droite.

Exercice 3

Remarque

La fonction f est un quotient de deux fonctions polynômes. On parle alors de fonction rationnelle. Une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

1. L'équation $x^2 + 3 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est un quotient de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = x^2 + 3$.
On a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2x$.
On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{2}^{u'(x)} \times \overbrace{(x^2+3)}^{v(x)} - \overbrace{2x}^{u(x)} \times \overbrace{2x}^{v'(x)}}{\underbrace{(x^2+3)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{2x^2 + 6 - 4x^2}{(x^2+3)^2} \\ &= \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2} \end{aligned}$$

2. a. On résout l'équation $f'(x) = 0$.

$$\frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2} = 0$$
$$-2x^2 + 6 = 0$$

Quotient nul

Un quotient est nul lorsque son numérateur est nul (et son dénominateur non nul, ce qui est le cas car $x^2 + 3$ n'est jamais nul).

$$\begin{aligned} -2x^2 + 6 &= 0 \\ -2x^2 &= -6 \\ x^2 &= 3 \\ x = \sqrt{3} \quad &\text{ou} \quad x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Pas trop fort

Pour résoudre cette équation, le calcul du discriminant est inutile. On isole le carré et le tour est joué. On ne prend pas une masse pour enfoncer une petite punaise :-)

L'équation $f'(x) = 0$ a deux solutions $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

b. Graphiquement, la tangente à $\mathscr{C}_f$ est horizontale aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice 4

Une équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
$f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ et $f(a) = \dfrac{1}{a}$.
On en déduit qu'une équation de la tangente en a est donnée par : $y = -\dfrac{1}{a^2}(x-a) + \dfrac{1}{a}$.
On simplifie l'écriture de $-\dfrac{1}{a^2}(x-a) + \dfrac{1}{a}$:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{a^2}(x-a) + \frac{1}{a} &= -\frac{1}{a^2} \times x + \frac{1}{a^2} \times a + \frac{1}{a} \\
&= -\frac{1}{a^2}x + \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a} \\
&= -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \\
&= -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}
\end{aligned}$$

On cherche les coordonnées des points B et C.

Pour $y = 0$, on a $-\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a} = 0$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a} &= 0 \\
-\frac{1}{a^2}x &= -\frac{2}{a} \\
x &= -\frac{2}{a} \times \frac{-a^2}{1} \\
x &= \frac{2a^2}{a} \\
x &= 2a
\end{aligned}$$

Le point B a pour coordonnées $(2a\ ;\ 0)$.

Pour $x = 0$, on a $y = \dfrac{2}{a}$.
Le point C a pour coordonnées $\left(0\ ;\ \dfrac{2}{a}\right)$.

Le point M a pour coordonnées $\left(a\ ;\ \dfrac{1}{a}\right)$.

Il reste à vérifier que le milieu de $[BC]$ est le point M :
$\dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{2a+0}{2} = a = x_M$.
$\dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{0 + \frac{2}{a}}{2} = \dfrac{1}{a} = y_M$.

Par conséquent, le point M est le milieu du segment $[BC]$.