MATHEMATIQUES
Dérivation (1) : sujet d'entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. Le nombre $f'(a)$, lorsqu'il existe, correspond graphiquement à la pente de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a.

2. a. $f(-1) = 2$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$.
$f'(-1) = 0$ (la tangente au point d'abscisse -1 est horizontale, donc son coefficient directeur est nul).
$f'(1) = 4$ (Voir les traces graphiques).

b. La tangente au point C a pour équation $y = mx + p$ avec $m = 4$ et $p = -2$
Ainsi la tangente au point C a pour équation $y = 4x - 2$.

Graphiquement

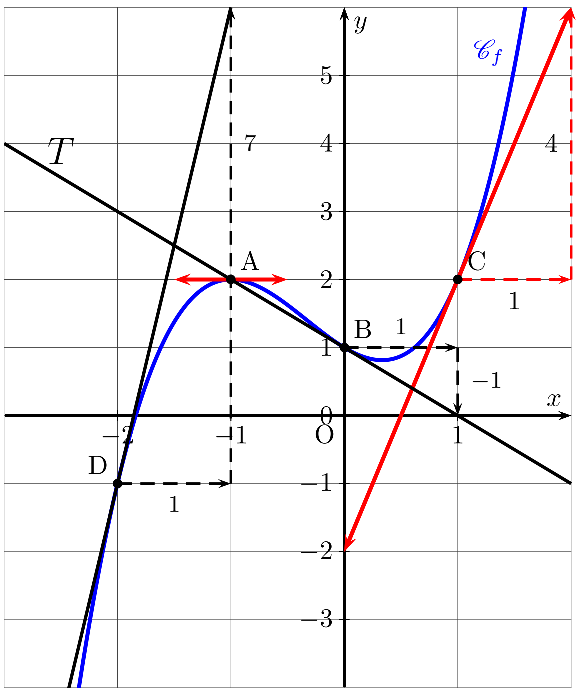
On obtient cette équation lisant le coefficient directeur (qui n'est autre que le nombre dérivé trouvé juste avant et l'ordonnée à l'origine.

c. Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale.
L'abscisse du point A en fait partie et il y a une autre solution comprise entre 0 et 1.
L'équation $f'(x) = 0$ a donc deux solutions.

Les bosses

A chaque "bosse", vous avez une fonction dérivée qui s'annule.

d. Tracé de la tangente T.
Sa pente est -1 et son ordonnée à l'origine est 1.
Il s'agit en fait de la tangente au point B de la courbe.



3. a. D est sur $\mathscr{C}_f$ si $f(-2)=-1$.

$f(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+1=-8+4+2+1=-1$.
Donc $D\in\mathscr{C}_f$.

Rappel

Un point $M(x\ ;\ y)$ est sur $\mathscr{C}_f$ si $y=f(x)$ (et si évidemment son abscisse est dans l'ensemble de définition de f.

b. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+2x-1$.

c. Le coefficient directeur de la tangente T_D est donné par $f'(-2)$.

Or $f'(-2)=3\times(-2)^2+2\times(-2)-1=7$.

d. On place le point D et on trace la droite de coefficient directeur 7 passant par D.

Remarque

On ne vous demande pas de déterminer une équation de cette tangente. C'est d'ailleurs inutile pour tracer cette droite.

Exercice 2

1. g est une somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, donc f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{3}\times 3x^2+\frac{-1}{x^2}\\ &= \frac{\cancel{3}x^2}{\cancel{3}}-\frac{1}{x^2}\\ &= x^2-\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{x^4}{x^2}-\frac{1}{x^2}\\ &= \frac{x^4-1}{x^2}\end{aligned}$$

Attention

$\dfrac{x^3}{3}$ s'écrit $\dfrac{1}{3}\times x^3$.
on utilise donc la formule $(ku)'=ku'$ (avec $k=\dfrac{1}{3}$ pour dériver $x\longmapsto\dfrac{x^3}{3}$.

2. Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 2 est donné par $g'(2)$.
$g'(2)=\dfrac{2^4-1}{2^2}=\dfrac{15}{4}=3,75$.
Ainsi, la tangente au point d'abscisse 2 de $\mathscr{C}_g$ est bien parallèle à la droite d'équation $y=3,75x-8$.

A savoir

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. Or le coefficient directeur de la tangente en ce point est $f'(2)$ et celui de la tangente est donné par $m=3,75$.

3. Résolution de l'équation $g'(x)=0$ et interprétation des solutions.

Pour $x\in]0\ ;\ +\infty[$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0\\ \frac{x^4-1}{x^2} &= 0\\ x^4-1 &= 0\\ (\underbrace{x^2}_{a^2})^2-\underbrace{1^2}_{b^2} &= 0 \quad \text{On reconnaît une différence de deux carrés.}\\ \underbrace{(x^2-1)}_{(a-b)}\underbrace{(x^2+1)}_{(a+b)} &= 0\\ x^2-1=0 \quad &\text{ou} \quad x^2+1=0 \ \ \text{Cette équation n'a pas de solution dans } \mathbb{R}\\ x=1 \text{ ou } x=-1 & \end{aligned}$$

L'équation $g'(x)=0$ a une unique solution dans $]0\ ;\ +\infty[$, c'est 1.
Cela signifie qu'au point d'abscisse 1, $\mathscr{C}_g$ a une tangente horizontale.

C'est autorisé !

Vous avez le droit de prendre votre calculatrice pour vérifier !

Exercice 3

1. Une équation de la tangente au point d'abscisse n est donnée par

$$y = f'(n)(x-n) + f(n)$$

On a $f(x) = -2 \times \dfrac{1}{x}$, d'où $f'(x) = -2 \times \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{2}{x^2}$.
Par conséquent, $f(n) = -\dfrac{2}{n}$ et $f'(n) = \dfrac{2}{n^2}$.
On en déduit que T_n a pour équation $y = \dfrac{2}{n^2}(x-n) + \left(-\dfrac{2}{n}\right)$, soit $y = \dfrac{2}{n^2}x - \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n}$, soit $y = \dfrac{2}{n^2}x - \dfrac{4}{n}$.
Finalement, T_n a bien pour équation $y = \dfrac{2}{n^2}(x-2n)$.

2. Le coefficient directeur de T_{-1} est $\dfrac{2}{(-1)^2} = 2$, et le coefficient directeur de T_1 est $\dfrac{2}{1^2} = 2$.
Les deux droites ont des coefficients directeurs égaux, elles sont donc parallèles.

3. $f(-4) = -\dfrac{2}{-4} = \dfrac{1}{2} \neq -4$. On en déduit que le point A n'est pas sur $\mathscr{H}$.

4. **a.** Pour $n \in \mathbb{R}*$,

$$\begin{aligned} A(-4\ ;\ -4) \in T &\iff \frac{2}{n^2}(-4-2n) = -4 \\ &\iff \frac{-8}{n^2} - \frac{4}{n} + 4 = 0 \\ &\iff \frac{-8-4n+4n^2}{n^2} = 0 \\ &\iff -4n^2 + 4n + 8 = 0 \end{aligned}$$

b. L'équation $-4n^2 + 4n + 8 = 0$ a deux solutions -1 et 2. On en déduit qu'il existe deux valeurs de n (-1 et 2) et donc deux points N sur $\mathscr{H}$ tels que T_n passe par A. Les coordonnées de ces deux points sont : $(-1\ ;\ 2)$ et $\left(2\ ;\ -\dfrac{1}{2}\right)$.

Exercice 4

1. Soit $h > 0$ et $a > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} &= \frac{\frac{a \times 1}{a(a+h)} - \frac{1 \times (a+h)}{a(a+h)}}{h} && \text{Mise au même dénominateur.} \\ &= \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} && \text{Attention aux parenthèses.} \\ &= \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} \\ &= \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} && \text{Diviser revient à multiplier par l'inverse.} \\ &= \frac{-1}{a(a+h)} && \text{On a simplifié par } h. \end{aligned}$$

Le calcul précédent est celui du taux de variations $t(h)$ de la fonction inverse entre les réels a et $a+h$.

$$\lim_{h \to 0} t(h) = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a^2}$$

Explications

Lorsque h se rapproche de 0, $a+h$ se rapproche de a et donc $a(a+h)$ se rapproche de $a \times a = a^2$.

Pour tout $a > 0$, le nombre $\dfrac{-1}{a^2}$ est un réel fini donc la fonction inverse est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

2. **a.** La fonction g étant le produit de deux fonctions $u : x \longmapsto 4x^2$ et $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ définies et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, elle est donc aussi définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

Pour déterminer sa fonction dérivée $g^{'}$, on utilise la formule : $(uv)^{'} = u^{'}v + uv^{'}$.

Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= 4 \times 2x\sqrt{x} + 4x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= 8x\sqrt{x} + \frac{4x\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \\ &= 8x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \\ &= 10x\sqrt{x} \end{aligned}$$

b. On ne remplace pas x par 0 pour savoir si la fonction g est dérivable en 0 ! !

On utilise le taux de variations de g entre les réels 0 et $0 + h = h$ et calculer sa limite quand h tend vers 0 :

Pourquoi ?

Tout simplement parceque l'expression précédente n'est valable que pour $x \in]0\,;\,+\infty[$ et 0 n'en fait pas partie.

$$\begin{aligned} t(h) &= \frac{g(h) - g(0)}{h} \\ &= \frac{10h\sqrt{h} - 10 \times 0 \times \sqrt{0}}{h} \\ &= \frac{10h\sqrt{h}}{h} \\ &= 10\sqrt{h} \end{aligned}$$

De plus,

$$\lim_{h\to 0} t(h) = \lim_{h\to 0} 10\sqrt{h} = 0 \in \mathbb{R}$$

La fonction g est donc dérivable en 0 et $g^{'}(0) = 0$.