MATHEMATIQUES
Dérivation (1) : QCM (corrigé)

Exercice 1

1. $f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse -2.
En partant du point A, on se décale de deux unités vers la droite et on descend d'une unité pour retrouver la droite. La pente est donc $-\frac{1}{2}$.

Réponse : c.

2. $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
La tangente est horizontale. Par conséquent, $f'(1) = 0$.

Réponse : b.

3. $f'(2)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.
En partant du point C, on se décale de trois unités vers la droite et on monte de deux unités pour retrouver la droite. La pente est donc $\frac{2}{3}$.

Réponse : a.

Exercice 2

1. Pour $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$ est donné par $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{((2+h)^2 - 2(2+h)) - (2^2 - 2 \times 2)}{h} \\
&= \frac{(2+h)^2 - 4 - 2h}{h} \qquad \text{La réponse c. est correcte.} \\
&= \frac{(\cancel{4} + 4h + h^2 - \cancel{4} - 2h) - (4-4)}{h} \\
&= \frac{h^2 + 2h}{h} \\
&= \frac{\cancel{h}(h+2)}{\cancel{h}} \qquad \text{On peut simplifier car on a des produits.} \\
&= h + 2
\end{aligned}$$

Réponse : b. et c.

2. Pour $h \neq 0$ et $h+3>0$ le taux d'accroissement de f entre 3 et $3+h$ est donné par $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(3+h)-f(3)}{h} &= \frac{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}{h} && \text{La réponse a. est correcte.}\\
&= \frac{(\sqrt{3+h}-\sqrt{3})(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})} && \text{On multiplie par } (\sqrt{3+h}+\sqrt{3}) \text{ le numérateur et le dénominateur.}\\
&= \frac{(\sqrt{3+h})^2-(\sqrt{3})^2}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&= \frac{3+h-3}{h(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&= \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{3+h}+\sqrt{3})}\\
&= \frac{1}{\sqrt{3+h}+\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Réponse : a. et d.

3. Pour $h \neq 0$ et $1+h>0$, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est donné par $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1}{1}}{h}\\
&= \frac{\frac{1}{1+h}-\frac{1+h}{1+h}}{h} && \text{On met au même dénominateur.}\\
&= \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} && \text{Attention ! N'oubliez pas les parenthèses (signe - devant un trait de fraction.... terrible !)}\\
&= \frac{\frac{1-1-h}{1+h}}{h}\\
&= \frac{\frac{-h}{1+h}}{h}\\
&= \frac{-h}{1+h}\times\frac{1}{h} && \text{Diviser par } h \text{ revient à multiplier par } \frac{1}{h}\\
&= -\frac{1}{1+h}
\end{aligned}$$

Réponse : b.

Exercice 3

1. f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \underbrace{6}_{k} \times \underbrace{x^3}_{u(x)}.$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6\times 3x^2\\
&= 18x^2
\end{aligned}$$

Réponse : b.

On reconnaît

Avant de dériver une fonction, on reconnaît sa forme afin d'utiliser la bonne formule. Ici, on utilise $k \times u$ avec $k=3$ et $u(x)=x^3$.

2. f est une fonction est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car la fonction racine carrée est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$:
$f(x) = \underbrace{2}_{k} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{u(x)}$.

On reconnaît

Avant de dériver une fonction, on reconnaît sa forme afin d'utiliser la bonne formule. Ici, on utilise $k \times u$ avec $k = 2$ et $u(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Réponse : d.

3. f est une fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car f est l'inverse d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

$f(x) = \dfrac{1}{3x}$.

$f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ avec $u(x) = 3x$.

$u'(x) = 3$. On a $f'(x) = \dfrac{-u'(x)}{(u(x))^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-3}{(3x)^2} \\ &= \frac{-3}{9x^2} \\ &= -\frac{1}{3x^2} \end{aligned}$$

Réponse : a.

4. f est une fonction polynôme, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \underbrace{\frac{x^3}{3}}_{u(x)} - \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v(x)} \underbrace{-x+7}_{w(x)}$.

$f(x) = u(x) + v(x) + w(x)$.

- $u(x) = \dfrac{x^3}{3} = \dfrac{1}{3}x^3$ et $u'(x) = \dfrac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$.
- $v(x) = \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{1}{2}x^2$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2} \times 2x = x$.
- $w(x) = -x + 7$ et $w'(x) = -1$.

Explications

f est sous la forme d'une somme de fonctions.
$f = u - v + w$, et $f' = u' - v' + w'$.
N'oubliez pas que $\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{1}{3}x^3$.

Ainsi,

$f'(x) = x^2 - x - 1$

Réponse : c.

5. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car f est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$.

$f(x) = \underbrace{x^2}_{u(x)} - \underbrace{\frac{1}{x}}_{v(x)}$.

$f(x) = u(x) - v(x)$.

- $u(x) = x^2$ et $u'(x) = 2x$.
- $v(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi,

Explications

f est sous la forme d'une différence de deux fonctions.
$f = u - v$, et $f' = u' - v'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x + \frac{1}{x^2} && \text{La réponse b. est correcte.} \\ &= \frac{2x \times x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} && \text{Mise au même dénominateur. Le dénomiteur commun est } x^2 \\ &= \frac{2x^3 + 1}{x^2} && \text{La réponse c. est correcte.} \end{aligned}$$

Réponse : b. et c.

6. f est une fonction dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car f est la différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{x}}_{u(x)} - \underbrace{3x}_{v(x)}.$$

$f(x) = u(x) - v(x)$.

- $u(x) = \sqrt{x}$ et $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $v(x) = 3x$ et $v'(x) = 3$.

Ainsi,

Explications

f est sous la forme d'une différence de deux fonctions.
$f = u - v$, et $f' = u' - v'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3 && \text{La réponse c. est correcte.} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3 \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} && \text{Mise au même dénominateur. Le dénomiteur commun est } 2\sqrt{x} \\ &= \frac{1 - 6\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Réponse : c.

7. f est une fonction dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car f est le produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$f(x) = \underbrace{(x^2 - 1)}_{u(x)}\underbrace{\sqrt{x}}_{v(x)}.$$

$f(x) = u(x) \times v(x)$.

- $u(x) = x^2 - 1$ et $u'(x) = 2x$.
- $v(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Explications

f est sous la forme d'un produit de deux fonctions.
$f = uv$, et $f' = u'v + uv'$.

Ainsi,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \overbrace{2x}^{u'(x)} \times \overbrace{\sqrt{x}}^{v(x)} + \overbrace{(x^2+1)}^{u(x)} \times \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{v'(x)} \\
&= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}} && \text{La réponse c. est correcte.} \\
&= \frac{2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}} && \text{Mise au même dénominateur. Le dénomiteur commun est } 2\sqrt{x} \\
&= \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}} && \sqrt{x}\times\sqrt{x} = x \text{ et } x\times x = x^2 \\
&= \frac{4x^2+x^2+1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} && \text{La réponse b. est correcte.}
\end{aligned}
$$

Réponse : b. et c. f est une fonction dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ car f est le produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle.

$f(x) = \underbrace{(x^2-1)}_{u(x)}\underbrace{\sqrt{x}}_{v(x)}.$

$f(x) = u(x) \times v(x)$.

• $u(x) = x^2 - 1$ et $u'(x) = 2x$.

• $v(x) = \sqrt{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ainsi,

Explications

f est sous la forme d'un produit de deux fonctions.
$f = uv$, et $f' = u'v + uv'$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \overbrace{2x}^{u'(x)} \times \overbrace{\sqrt{x}}^{v(x)} + \overbrace{(x^2+1)}^{u(x)} \times \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}^{v'(x)} \\
&= 2x\sqrt{x} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}} && \text{La réponse c. est correcte.} \\
&= \frac{2x\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}} && \text{Mise au même dénominateur. Le dénomiteur commun est } 2\sqrt{x} \\
&= \frac{4x^2}{2\sqrt{x}} + \frac{x^2-1}{2\sqrt{x}} && \sqrt{x}\times\sqrt{x} = x \text{ et } x\times x = x^2 \\
&= \frac{4x^2+x^2+1}{2\sqrt{x}} \\
&= \frac{5x^2-1}{2\sqrt{x}} && \text{La réponse b. est correcte.}
\end{aligned}
$$

Réponse : b. et c.

8. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Autre façon de dire

f est une fonction rationnelle. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. Une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

$f(x)=\dfrac{3}{2x-1}$.

On peut transformer l'écriture de $f(x)$ pour faire apparaître $\dfrac{1}{v}$ (car on a une constante au numérateur).

$f(x)=\dfrac{3}{2x-1}=3\times\dfrac{1}{2x-1}$.

La fonction f est de la forme $k\times u$ avec $k=3$ et $u(x)=\dfrac{1}{2x-1}$.

u est de la forme $\dfrac{1}{v}$ avec $v(x)=2x-1$.

$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{-v'}{v^2}$ avec $v'(x)=2$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \overbrace{3}^{k}\times\overbrace{\left(\frac{-2}{2x-1)^2}\right)}^{-\frac{v'}{v^2}} \\ &= \frac{-6}{(2x-1)^2} \\ &= -\frac{6}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

Réponse : b.

Autre méthode moins jolie

On peut voir $f(x)$ comme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=3$ et $v(x)=2x-1$.

En utilisant $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, on trouve le même résultat. Je vous laisse faire....

9. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Autre façon de dire

f est une fonction rationnelle. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Une fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

f est un quotient de deux fonctions.

f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=x-1$ et $v(x)=x+1$.

On a $u'(x)=1$ et $v'(x)=1$.

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{1}^{u'(x)}\times\overbrace{(x+1)}^{v(x)}-\overbrace{(x-1)}^{u(x)}\times\overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{(x+1)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{2}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Réponse : c.

Exercice 4

1. Quelque soit les méthodes, il y a deux nombres à calculer : $f'(2)$ (qui correspond au coefficient directeur de la tangente) et $f(2)$ (qui est l'ordonnée du point en lequel on cherche l'équation de la tangente).

- Calcul de $f'(2)$:

f est une fonction polynôme du second degré, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2x + \dfrac{1}{5}$.

Pensez-y !

$\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{5}x$.

Ainsi, la dérivée de $x \longmapsto \dfrac{x}{5}$ est $x \longmapsto \dfrac{1}{5}$.

$f'(2) = 2 \times 2 + \dfrac{1}{5} = 4 + \dfrac{1}{5} = \dfrac{20}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{21}{5}$.

Rappel

$f'(2)$ est la pente de la tangente au point d'abscisse 2.

- Calcul de $f(2)$.

$f(2) = 2^2 + \dfrac{2}{5} = 4 + \dfrac{2}{5} = \dfrac{20}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{22}{5}$.

Première méthode :

On utilise la formule $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ qui est l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a.

Pour $a = 2$, on obtient : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$.

Equation de la tangente :

$$\begin{aligned}
y &= \frac{21}{5}(x-2) + \frac{22}{5} \\
y &= \frac{21}{5}x - \frac{42}{5} + \frac{22}{5} \\
y &= \frac{21}{5}x - \frac{20}{5} \\
y &= \frac{21}{5}x - 4
\end{aligned}$$

Réponse : c.

Deuxième méthode :

Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ est donnée par $y = mx + p$.

On sait que le coefficient directeur d'une tangente est un nombre dérivé. Ici, on cherche une équation de la tangente au point d'abscisse 2, donc $m = f'(2) = \dfrac{21}{25}$.

L'équation est donc de la forme : $y = \dfrac{21}{5}x + p$.

Pour déterminer p, on utilise les coordonnées du point A en lequel on veut l'équation de la tangente. Ce point a pour coordonnées $A(2\ ;\ f(2))$, soit $A\left(\underbrace{2}_{x}\ ;\ \underbrace{\dfrac{22}{5}}_{y}\right)$.

On remplace x par 2 et y par $\dfrac{22}{5}$ dans l'équation :

$$\begin{aligned}
\frac{22}{5} &= \frac{21}{5}\times 2+p\\
\frac{22}{5} &= \frac{42}{5}+p\\
\frac{22}{5}-\frac{42}{5} &= p\\
\frac{-20}{5} &= p\\
p &= -4
\end{aligned}$$

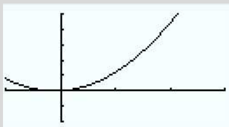
C'est un rappel

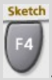
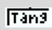
Le point A est sur la tangente (puisque c'est justement en ce point qu'on souhaite déterminer l'équation de la tangente). Donc ses coordonnées vérifient l'équation de cette tangente. Cela permettra d'obtenir une équation dont l'inconnue est p et donc d'en déterminer sa valeur.

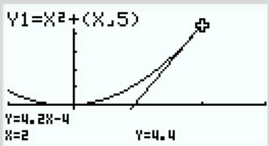
On retrouve bien l'équation $y=\dfrac{21}{5}x-4$.

Calculatrice

On trace la représentation graphique de la fonction f. En paramétrant la fenêtre d'affichage avec $X_{Min}=-1$, $X_{Max}=3$, $X_{Scale}=1$ $Y_{Min}=-2$, $Y_{Max}=5$ et $Y_{Scale}=1$, on obtient :



Avec Sketch que l'on obtient avec , puis , on sélectionne  avec . On entre la valeur 2, et en appuyant deux fois sur . On obtient l'écran :



Si le paramétrage de votre calculatrice est bien fait (Setup, Dérivative : ON), vous obtenez l'équation réduite de la tangente ainsi que sa représentation graphique.

2. On procède de la même façon que dans l'exercice précédent.
• Calcul de $f'(-1)$:
f est une différence de deux dérivables sur $]-\infty\ ;\ 0[$, donc f est dérivable sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

$f'(x)=1-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=1+\dfrac{1}{x^2}$.

$f'(-1)=1+\dfrac{1}{(-1)^2}=1+1=2$.

• Calcul de $f(-1)$.

$f(-1)=-1-\dfrac{1}{-1}=-1+1=0$.

Première méthode :
On utilise la formule $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ qui est l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a.
Pour $a=2$, on obtient : $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$.
Equation de la tangente :

$$\begin{aligned}
y &= 2(x+1)+0\\
y &= 2x+2
\end{aligned}$$

Réponse : a.

Deuxième méthode :
Une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ est donnée par $y = mx + p$.
On sait que le coefficient directeur d'une tangente est un nombre dérivé. Ici, on cherche une équation de la tangente au point d'abscisse 2, donc $m = f'(-1) = 2$.
L'équation est donc de la forme : $y = 2x + p$.
Pour déterminer p, on utilise les coordonnées du point A en lequel on veut l'équation de la tangente. Ce point a pour coordonnées $A(-1\ ;\ f(-1))$, soit $A(-1\ ;\ 0)$.

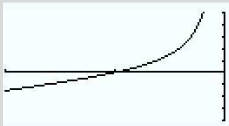
On remplace x par -1 et y par 0 dans l'équation :

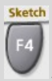
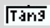
$$\begin{array}{rcl} 0 & = & 2 \times (-1) + p \\ p & = & 2 \end{array}$$

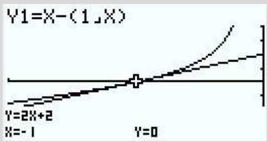
On retrouve bien l'équation $y = 2x + 2$.

Calculatrice

On trace la représentation graphique de la fonction f. En paramétrant la fenêtre d'affichage avec$X_{Min} = -2$, $X_{Max} = 0$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -4$, $Y_{Max} = 5$ et $Y_{Scale} = 1$, on obtient :



Avec Sketch que l'on obtient avec , puis , on sélectionne  avec . On entre la valeur -1, et en appuyant deux fois sur . On obtient l'écran :



Si le paramétrage de votre calculatrice est bien fait (Setup, Dérivative : ON), vous obtenez l'équation réduite de la tangente ainsi que sa représentation graphique.