MATHEMATIQUES
Dérivation (1) : entraînement savoir-faire (Corrigé)

Exercice 1

1. Soit $h \neq 0$.

Le taux d'accroissement de f entre 4 et $4+h$ est donné par : $t(h) = \dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$.

- $f(4+h) = (4+h)^2 = 16 + 8h + h^2$.
- $f(4) = 4^2 = 16$.

$$\begin{aligned}
t(h) &= \frac{f(4+h)-f(4)}{h} \\
&= \frac{(16+8h+h^2)-16}{h} \\
&= \frac{8h+h^2}{h} \\
&= \frac{\cancel{h}\times(8+h)}{\cancel{h}} \quad \text{On factorise par } h \text{ et on simplifie.} \\
&= 8+h
\end{aligned}$$

Si vous êtes à l'aise

Vous pouvez calculer ce taux d'accroissement directement sans faire les calculs intermédiaires de $(4+h)^2$ et 4^2, en écrivant :

$$t(h) = \frac{(4+h)^2-4^2}{h}$$

On calcule la limite de ce taux d'accroissement :

$\lim\limits_{h\to 0}(8+h) = 8$. On obtient un nombre réel. Ainsi, on peut dire que f est dérivable en $a=4$ et que $f'(4)=8$.

2. a. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$:

Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ est donné par : $t(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

- Calcul de $f(a+h)$.

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= 2(a+h)^2-(a+h)+1 \quad \text{On remplace } a \text{ par } a+h \text{ dans l'expression de } f \\
&= 2(a^2+2ah+h^2)-(a+h)+1 \quad \text{On développe en utilisant l'égalité remarquable } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \\
&= 2a^2+4ah+2h^2-a-h+1 \quad \text{On enlève les parenthèses autour de } (a+h)\text{. Attention au signe } -
\end{aligned}$$

- Calcul de $f(a)$.

$f(a) = 2a^2-a+1$.

$$\begin{aligned}
t(h) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= \frac{(2a^2+4ah+2h^2-a-h+1)-(2a^2-a+1)}{h} \\
&= \frac{2a^2+4ah+2h^2-a-h+1-2a^2+a-1}{h} \quad \text{On enlève les parenthèses autour de } (a+h)\text{. Attention au signe } - \\
&= \frac{4ah+2h^2-h}{h} \quad \text{On réduit.} \\
&= \frac{\cancel{h}\times(4a+2h-1)}{\cancel{h}} \quad \text{On factorise par } h \text{ et on simplifie.} \\
&= 4a+2h-1
\end{aligned}$$

b. Le taux d'accroissement de f entre 5 et 8 s'obtient en prenant $a = 5$ et $h = 3$.
$t(3) = 4 \times 5 + 2 \times 3 - 1 = 25$.

Le taux d'accroissement de f entre 5 et 8 est 25.

Interprétation graphique

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite (AB). Le point A est le point de la courbe dont l'abscisse est 5 et le point B est le point de la courbe dont l'abscisse est 8.

c. $\lim\limits_{h \to 0} 4a - 1 + 2h = 4a - 1$. La limite du taux d'accroissement est un nombre réel, on en déduit que f est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et $f'(a) = 4a - 1$.

3. a. On calcule le taux d'accroissement de g entre 2 et $2 + h$:

$$\begin{aligned}
t(h) &= \frac{g(2+h) - g(2)}{h} \\
&= \frac{\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{1 \times 2}{2(2+h)} - \dfrac{1 \times (2+h)}{2(2+h)}}{h} && \text{On met au même dénominateur.} \\
&= \frac{\dfrac{2 - (2+h)}{2(2+h)}}{h} && \text{N'oubliez pas les parenthèses.} \\
&= \frac{\dfrac{\cancel{2} - \cancel{2} - h}{2(2+h)}}{h} \\
&= \frac{\dfrac{-h}{2(2+h)}}{h} \\
&= \frac{-h}{2(2+h)} \times \frac{1}{h} && \text{Diviser par } h \text{ revient à multiplier par } \frac{1}{h} \\
&= \frac{-1}{2(2+h)} && \text{On simplifie par } h \\
&= \frac{-1}{4+2h}
\end{aligned}$$

b. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{4+2h} = -\dfrac{1}{4}$. La limite du taux d'accroissement est un nombre réel, on en déduit que g est dérivable en $a = 2$ et $g'(2) = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2

1. $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a.

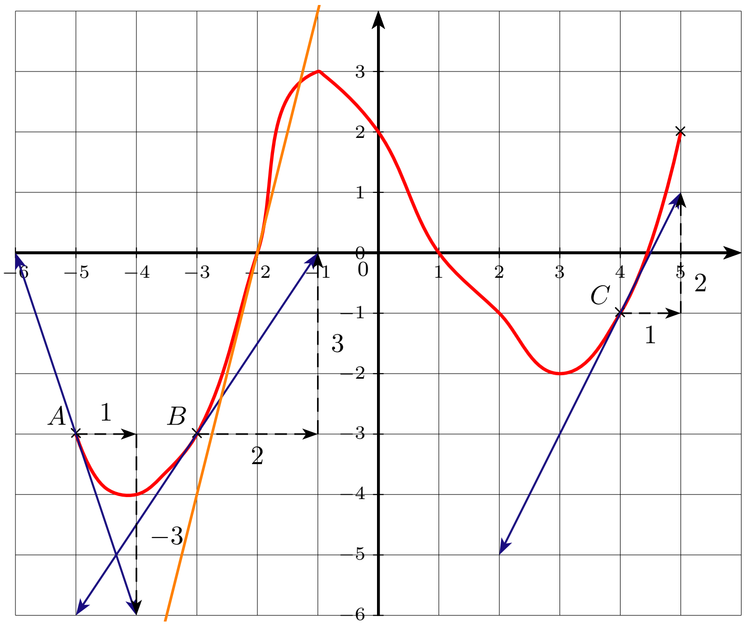
2. • $f'(-5)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -5. Ouf ! elle est tracée. A partir du point A (le point de la courbe d'abscisse -5), on se décale d'une unité vers la droite et on descend de 3 unités pour retrouver un point de la droite. Ainsi, $f'(-5) = -3$.

• $f'(-3)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -5. Ouf ! elle est encore tracée. A partir du point B (le point de la courbe d'abscisse -3), on se décale de deux unités vers la droite et on monte de 3 unités pour retrouver un point de la droite. Ainsi, $f'(-3) = \dfrac{\text{"Déplacement vertical"}}{\text{"Déplacement horizontal"}} = \dfrac{3}{2}$.

• $f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse -5. Aïe elle n'est pas tracée. Mais cette droite est particulière car la courbe au point d'abscisse -1 fait "une bosse". Donc la tangente est horizontale en ce point (la pente est nulle). Ainsi, $f'(-1) = 0$.

• $f'(4)$ est le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 4. A partir du point C (le point de la courbe d'abscisse 4), on se décale d'une unité vers la droite et on monte de 2 unités pour retrouver un point de la droite. Ainsi, $f'(-3) = 2$.

3. Le point en lequel on trace la tangente est le point de la courbe d'abscisse -2. Son ordonnée est 0. A partir de ce point, on trace la droite de coefficient directeur 4 : on se décale d'une unité vers la droite et on monte de 4 unités. La droite passe par le point de coordonnées $(-1\ ;\ 4)$.



Exercice 3

• Au point d'abscisse -1.
L'équation réduite de la tangente est donnée par :

$$y = f'(-1)(x-(-1)) + f(-1)$$

$f(-1) = 2$ et $f'(-1) = -4$.

En remplaçant, on obtient :

$y = -4(x+1) + 2$ soit $y = -4x - 2$.

Autrement

L'équation réduite d'une droite est $y = mx + p$.
Pour une tangente, le coefficient directeur est le nombre dérivé. Ainsi : $m = f'(-1) = -4$.
La tangente a pour équation $y = -4x + p$.
Comme $f(-1) = 2$, le point $A(-1\ ;\ 2)$ est le point de "contact" de la tangente et de la courbe.
Ses coordonnées vérifient l'équation, donc
$2 = -4 \times (-1) + p$. On en déduit $p = -2$.
On retrouve l'équation de la tangente : $y = -4x - 2$.

• Au point d'abscisse 6.
L'équation réduite de la tangente est donnée par :

$$y = f'(6)(x-6) + f(6)$$

$f(6) = -3$ et $f'(6) = 2$.

En remplaçant, on obtient :

$y = 2(x-6) - 3$ soit $y = 2x + 15$.

Exercice 4

$f(x) =$	Dérivable sur $I =$	$f'(x) =$
k (constante)	$\mathbb{R}$	0
$mx + p$	$\mathbb{R}$	m
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exercice 5

1. Les trois fonctions f, g et h sont des sommes.
On utilise donc la formule $(u+v)'=u'+v'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\times 3x^2-2\times 2x+4 \\ &= 9x^2-4x+4 \end{aligned}$$

Remarque
• La dérivée de $x\longmapsto x^3$ est $x\longmapsto 3x^2$.
• N'oubliez pas que la dérivée d'une constante est nulle.

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2\times 2x \\ &= -4x \end{aligned}$$

$$h'(x) = 3x^2-1$$

Remarque
La dérivée de $x\longmapsto x$ est $x\longmapsto 1$.

2. Les trois fonctions f, g et h sont des sommes.
On utilise donc la formule $(u+v)'=u'+v'$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5+3\times 2x \\ &= 5+6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0,5\times 3x^2-0,3 \\ &= 1,5x^2-0,3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{3}\times 3x^2+2x \\ &= x^2+2x \end{aligned}$$

Remarque
$\frac{1}{3}\times 3=1$

3. • La fonction f est la somme de deux fonctions.

On a $f(x)=5x+4\times\dfrac{1}{x}$.

D'où : $f'(x)=5+4\times\dfrac{-1}{x^2}=5-\dfrac{4}{x^2}$.

Explications
• Il est parfois utile de transformer l'écriture de la fonction pour faire apparaître des fonctions connues.
• La dérivée de $x\longmapsto\dfrac{1}{x}$ est $x\longmapsto-\dfrac{1}{x^2}$.

• La fonction g est un produit de deux fonctions.
On utilise donc la formule $(uv)'=u'v+uv'$ avec $u(x)=5x+7$ et $v(x)=4-2x$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \overbrace{5}^{u'(x)}\times\overbrace{(4-2x)}^{v(x)}+\overbrace{(5x+7)}^{u(x)}\times\overbrace{(-2)}^{v'(x)} \\ &= 20-10x-10x-14 \quad \text{On a développé l'expression pour la simplifier} \\ &= -20x+6 \end{aligned}$$

Autrement
Il est tout à fait possible de développer $g(x)$ pour se ramener à une somme et de dériver cette somme plutôt que de dériver sous la forme d'un produit. On trouve le même résultat. Essayez !

• La fonction h est un produit de deux fonctions.
On utilise donc la formule $(uv)'=u'v+uv'$ avec $u(x)=x$ et $v(x)=4x+1$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \overbrace{1}^{u'(x)}\times\overbrace{(4x+1)}^{v(x)}+\overbrace{x}^{u(x)}\times\overbrace{4}^{v'(x)} \\ &= 4x+1+4x \quad \text{On a développé l'expression pour la simplifier} \\ &= 8x+1 \end{aligned}$$

4. • La fonction f est un quotient de deux fonctions.

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x - 4$ et $v(x) = x + 5$.

Remarque

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{3}^{u'(x)} \times \overbrace{(x+5)}^{v(x)} - \overbrace{(3x-4)}^{u(x)} \times \overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{(x+5)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{3x + 15 - (3x+4)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{\cancel{3x} + 15 - \cancel{3x} - 4}{(x+5)^2} \\ &= \frac{11}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

• La fonction g est un quotient de deux fonctions.
On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 2$ et $v(x) = x^2 + 2$.

Remarque

$u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\overbrace{0}^{u'(x)} \times \overbrace{(x^2+2)}^{v(x)} - \overbrace{2}^{u(x)} \times \overbrace{2x}^{v'(x)}}{\underbrace{(x^2+2)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{-4x}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

C'est mieux en 1èreS

Pour cette fonction, on peut écrire $g(x) = 2 \times \dfrac{1}{x^2+2}$ et utiliser la formule de dérivation $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$.
Essayez de retrouver le résultat avec cette formule.

• La fonction h est un quotient de deux fonctions.
On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = 4x - 5$.

Remarque

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = 4x - 5$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{\overbrace{1}^{u'(x)} \times \overbrace{(4x-5)}^{v(x)} - \overbrace{x}^{u(x)} \times \overbrace{4}^{v'(x)}}{\underbrace{(4x-5)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{\cancel{4x} - 5 - \cancel{4x}}{(4x-5)^2} \\ &= \frac{-5}{(4x-5)^2} \end{aligned}$$

5. • En notant u la fonction racine carrée, on a $f(x) = u(2x+4)$.
Comme $x \longmapsto 2x + 4$ a pour dérivée $x \longmapsto 2$ et que $u\ :\ x \longmapsto \sqrt{x}$ a pour dérivée $u'\ :\ x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, on obtient avec la formule qui va bien ci-contre :

$f'(x) = 2 \times u'(2x+4) = 2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x+4}}$.

Formule

La fonction f définie par $f(x) = g(ax+b)$ a pour dérivée : $f'(x) = ag'(ax+b)$.

• En notant u la fonction inverse on a $f(x) = u(2x+4)$.
Comme $x \longmapsto 2x + 4$ a pour dérivée $x \longmapsto 2$ et que $u\ :\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a pour dérivée $u'\ :\ x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$, on obtient avec la formule qui va bien au-dessus :

$f'(x) = 2 \times u'(2x+4) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{(2x+4)^2}\right) = \dfrac{-2}{(2x+4)^2}$.

Autrement

On pouvait aussi utiliser la formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

• En notant u la fonction qui élève à la puissance 5, on a $f(x) = u(2x+4)$.
Comme $x \longmapsto 2x+4$ a pour dérivée $x \longmapsto 2$ et que $u : x \longmapsto x^5$ a pour dérivée $u' : x \longmapsto 5x^4$, on obtient avec la formule qui va bien de la page précédente :

$f'(x) = 2 \times u'(2x+4) = 2 \times \left(5(2x+4)^4\right) = 10(2x+4)^4$.

Exercice 6

La fonction f est une somme de deux fonctions.
$f(x) = x + 4 + \dfrac{1}{x+2}$.

Explications

Pour dériver la fonction v, on utilise la formule $\left(\dfrac{1}{g}\right)' = \dfrac{-g'}{g^2}$ avec $g(x) = x+2$.
On a donc $g'(x) = 1$ et par suite $g'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$.

$f = u + v$ avec $u(x) = x+4$ et $v(x) = \dfrac{1}{x+2}$.
$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{-1}{(x+2)^2}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \frac{-1}{(x+2)^2} \\
&= \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \\
&= \frac{(x+2)^2 - 1}{(x+2)^2} \\
&= \frac{x^2+4x+4-1}{(x+2)^2} \\
&= \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}
\end{aligned}$$

Rappel

Pour développer $(x+2)^2$, on utilise l'égalité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 2$.