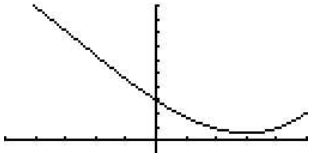
MATHEMATIQUES
Applications de la dérivation : sujet d'entraînement 1

Exercice 1

h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 0,1x^3 + 0,75x^2 - 7,2x + 15$$

Nabolos a tracé la courbe représentative de la fonction h à l'écran de sa calculatrice (fenêtre : $-5 \leqslant X \leqslant 5$ pas 1 et $-5 \leqslant Y \leqslant 50$, pas 5).



Il conjecture que la fonction h admet un seul extremum local.
Qu'en pensez-vous ?

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2(1-x)$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que f admet un extremum en $\dfrac{2}{3}$ et déterminer sa valeur exacte.

2. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Déterminer l'équation de la tangente T au point d'abscisse 1.

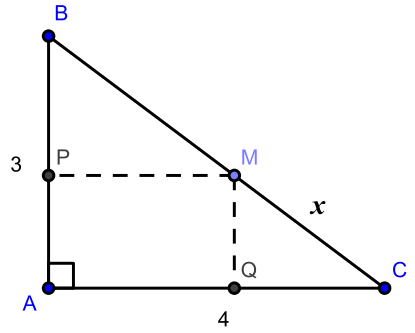
4. a. Montrer que l'étude de la position de T par rapport à $\mathscr{C}_f$ revient à étudier le signe de l'expression :

$$(x-1)^2(-x-1)$$

b. En déduire la position de T par rapport à $\mathscr{C}_f$.

Exercice 3

ABC est un triangle rectangle en A tel que $AB = 3$ et $AC = 4$.
Soit M un point de $[BC]$.
P est le point de $[AB]$ tel que les droites (AB) et (MP) soient perpendiculaires.
Q est le point de $[AC]$ tel que les droites (AC) et (MQ) soient perpendiculaires.



L'objectif de cet exercice est de placer le point M pour que l'aire du rectangle $APMQ$ soit maximale.

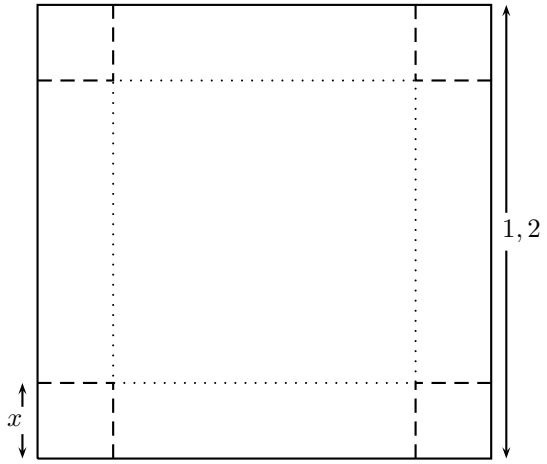
1. **a.** Calculer BC.
b. Montrer que les droites (AP) et (MQ) sont parallèles.

2. **a.** Montrer que $MQ = \dfrac{3}{5}x$.
b. Exprimer PM en fonction de x.
c. En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 5]$, $\mathcal{A}_{APMQ} = \dfrac{-12x^2 + 60x}{25}$.

3. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 5]$ par : $f(x) = \dfrac{-12x^2 + 60x}{25}$.
a. Calculer $f'(x)$.
b. En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ 5]$.
c. En déduire l'aire maximale du rectangle $APMQ$ et la position du point M pour que cette aire soit maximale.

Exercice 4

Dans une plaque de carton carrée de 1,20 mètre de côté, on découpe des carrés aux quatre coins afin de construire une boîte sans couvercle. Comment faire pour obtenir une boîte de volume maximal ?



Méthode

L'énoncé est court. C'est à vous de mettre au point votre stratégie pour résoudre ce problème. L'idée est de se ramener à l'étude de la fonction qui pour une valeur de x donnée associe le volume correspondant de la boîte (sans couvercle).