MATHEMATIQUES
Applications de la dérivation : sujet entraînement 1 (Corrigé)

Exercice 1

On étudie le sens de variation de la fonction h.
Pour cela, on calcule sa fonction dérivée et on étudie son signe.

Explications

Pour répondre à cette question, il faut dresser le tableau de variations de la fonction h.

La fonction h est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0,1 \times 3x^2 + 0,75 \times 2x - 7,2 \\ &= 0,3x^2 + 1,5x - 7,2 \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme du second degré avec $a = 0,3$, $b = 1,5$ et $c = -7,2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 10,89$.

Rappel

Vous devez reconnaître les fonctions polynômes du second degré et savoir étudier son signe.

Le polynôme a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 3$
$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -8$

Remarque

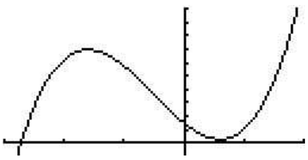
Votre calculatrice est votre amie...

Le polynôme est du signe de a partout sauf entre ses racines.
Ainsi :

x	$-\infty$		-8		3		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	↗		69,4	↘	2,85	↗	

Remarques

Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau et pour déterminer les valeurs remarquables $h(-8)$ et $h(3)$.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -15$, $X_{Max} = 10$, $X_{Scale} = 5$ $Y_{Min} = -10$, $Y_{Max} = 100$ et $Y_{Scale} = 10$.

Ainsi, la fonction h admet deux extrémums locaux : un maximum et un minimum.
La conjecture de Nabolos est fausse.

Attention

La fenêtre graphique établie par Nabolos pour sa conjecture n'était pas adaptée. Donc, attention !

Exercice 2

1. Pour déterminer les extremums de la fonction f, on peut étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$:

- On commence par calculer $f'(x)$ pour tout x réel :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$. C'est une fonction polynôme.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(1-x) = x^2 - x^3$.

Astuce

Rien ne vous empêche de modifier l'écriture de $f(x)$ afin de calculer sa dérivée dans de meilleures conditions. C'est quand même plus simple de calculer la fonction dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x^3$ que de calculer celle de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - x^3$. Non ?

Ainsi, $f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$.

$$\begin{aligned} 2-3x &= 0 \\ -3x &= -2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Factoriser

La factorisation par le facteur commun x doit vous sauter aux yeux. C'est plus rapide que d'étudier le signe de $2x-3x^2$ avec le discriminant et tout ce qui va avec....
Pour obtenir le signe de $2-3x$, on cherche d'abord la valeur qui l'annule.

- On obtient le tableau de signes de f' sur $\mathbb{R}$ et ainsi les variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-3x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

- $f(0) = 0^2 \times (1-0) = 0$

- $f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1-\frac{2}{3}\right)$
$= \frac{4}{9} \times \frac{1}{3}$
$= \frac{4}{27}$

La fonction f admet bien un extrémum local en $x = \frac{2}{3}$. Celui-ci vaut $\frac{4}{27}$.

2. Tableau de signes de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Pratique

La fonction f est déjà écrite sous la forme d'un produit. Sympa pour étudier son signe.

3. La tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a admet pour équation réduite : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Ici $a = 1$: $f'(1) = 1 \times (2 - 3 \times 1) = -1$ et $f(1) = 2^2 \times (1-1) = 0$.

On obtient ainsi l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$
$= -1 \times (x-1) + 0$
$= -x + 1$.

4. a.

Rappel

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative et sa tangente T au point d'abscisse a d'équation réduite $y = mx + p$:

- $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de T $\iff f(x) - (mx + p) > 0$;
- $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de T $\iff f(x) - (mx + p) < 0$.

Pour étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T, on étudie le signe de l'expression $x^2(1-x) - (-x+1)$ en fonction de x, à l'aide de sa forme factorisée :

$$\begin{aligned}
x^2(1-x) - (-x+1) &= x^2(-x+1) - (-x+1) \quad \color{blue}{\text{Il y a un facteur commun : } -x+1.}\\
&= (-x+1)(x^2-1)\\
&= (-x+1)(x-1)(x+1)\\
&= -(x-1)(x-1)(x+1)\\
&= -(x-1)^2(x+1)\\
&= (x-1)^2(-x-1)
\end{aligned}$$

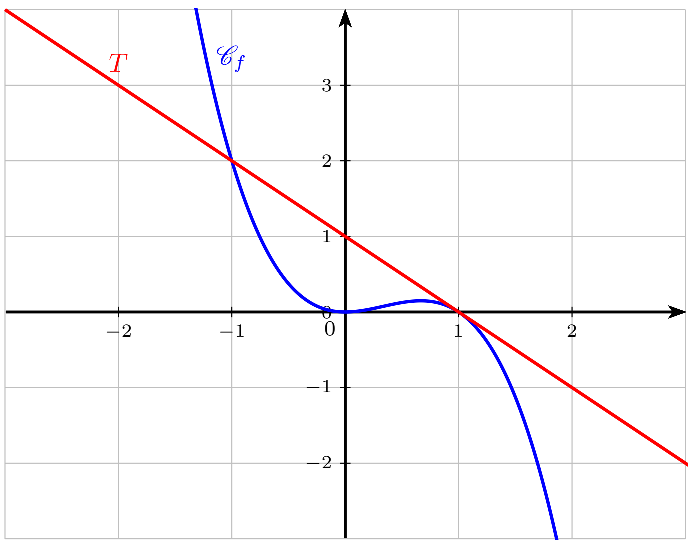
Pas de panique

Si vous "ratez" le facteur commun, vous aurez toujours la possibilité de développer l'expression donnée dans l'énoncé afin de vérifier que c'est la même expression que la votre.

On obtient alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$		$+$	0	$+$	
$-x-1$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)^2(-x-1)$		$+$	0	$-$	0	$-$	

b. D'après le tableau de signes précédent, on en déduit que T est au-dessus de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ +\infty[$ et au-dessous de $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.



Exercice 3

1. a. Le triangle ABC est rectangle en A. Le théorème de Pythagore nous assure donc la relation :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

D'où $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

b. Les droites (AP) et (MQ) sont clairement parallèles car toutes deux perpendiculaires à une même droite, la droite (AC).

2. a. Les droites (AP) et (MQ) sont parallèles.
Les points C, M et B sont alignés dans cet ordre et les points C, Q et A sont alignés dans cet ordre.
D'après le théorème de Thalès, on a donc :

$$\frac{CM}{CB} = \frac{MQ}{AB} = \frac{CQ}{CA}$$

$\dfrac{MQ}{AB} = \dfrac{CM}{CB} \Longleftrightarrow \dfrac{MQ}{3} = \dfrac{x}{5}$

Par produit en croix, $MQ \times 5 = x \times 3$, soit $MQ = \dfrac{3}{5}x$.

Vocabulaire

Le point Q est en fait le projeté orthogonal du point M sur la droite (AC).
De même, le point P est le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB)

b. Les droites (PM) et (AC) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à une même droite, la droite (AB).
Les points B, M et C sont alignés dans cet ordre et les points B, P et A sont alignés dans cet ordre.
D'après le théorème de Thalès, on a donc :

$$\frac{BP}{BA} = \frac{PM}{AC} = \frac{BM}{BC}$$

$\dfrac{PM}{AC} = \dfrac{BM}{BC} \Longleftrightarrow \dfrac{PM}{4} = \dfrac{5-x}{5}$

Par produit en croix, $PM \times 5 = 4 \times (5 - x)$, soit $PM = \dfrac{4}{5}(5 - x)$.

c. $\mathcal{A}_{APMQ} = MQ \times PM = \dfrac{3}{5}x \times \dfrac{4}{5}(5-x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{APMQ} &= \frac{3}{5}x \times \frac{4}{5}(5-x) \\ &= \frac{3x \times 4(5-x)}{5 \times 5} \\ &= \frac{12x(5-x)}{25} \\ &= \frac{-12x^2 + 60x}{25}\end{aligned}$$

3. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 5]$ par : $f(x) = \dfrac{-12x^2 + 60x}{25}$.

a. $f(x) = \dfrac{-12x^2 + 60x}{25} = -\dfrac{12}{25}x^2 + \dfrac{60}{25}x$.

Ainsi on obtient $f'(x) = -\dfrac{12}{25} \times 2x + \dfrac{60}{25} = \dfrac{-24x + 60}{25}$.

Pensez-y !

Il est plus simple de considérer la fonction f comme une fonction polynôme plutôt qu'une fonction rationnelle pour effectuer la dérivée.
Pour obtenir les variations de cette fonction trinôme du second degré on pouvait se passer du calcul de la dérivée.

b. Etudions les variations de f sur $[0\ ;\ 5]$:
On étudie le signe de f' sur $[0\ ;\ 5]$. On reconnaît une fonction affine.

$$\begin{aligned}\frac{-24x+60}{25} &= 0\\ -24x+60 &= 0\\ -24x &= -60\\ x &= \frac{-60}{24}\\ &= 2,5\end{aligned}$$

Signe d'une fonction affine

Pour obtenir le signe d'une fonction affine, on calcule d'abord la valeur qui l'annule.

On obtient le tableau de variations suivant :

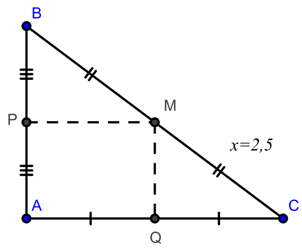
x	0		2,5		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

D'après le tableau de variations précédent, la fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ 2,5]$ et strictement décroissante sur $[2,5\ ;\ 5]$.

c.

D'après le tableau de variations précédent, l'aire maximale du rectangle $APMQ$ est de 3 et est atteint pour $x = 2,5$, c'est à dire quand le point M est le milieu du segment $[BC]$.

Dans cette configuration, Q est le milieu du segment $[AC]$ et P celui de $[AB]$.



Exercice 4

Le volume de la boîte est donnée par $L \times \ell \times h$, avec $L = 1,2 - 2x$, $\ell = 1,2 - 2x$ et $h = x$.

Pensez-y !

La plaque de départ est un carré, donc $L = \ell$.

En notant f la fonction définie sur $[0\ ;\ 0,6]$ par :

$$f(x) = x(1,2-2x)(1,2-2x)$$

Pensez-y !

x prend des valeurs comprises entre 0 et 0,6. Autrement il n'y a pas de boîte ! Gênant.

On obtient la fonction qui pour une valeur de x donne le volume de la boîte.
L'étude de cette fonction permettra de répondre à la question.
On développe l'expression $f(x)$ afin de pouvoir calculer la dérivée de f dans de meilleures conditions.

$$\begin{aligned}f(x) &= x(1,2-2x)(1,2-2x)\\ &= x\underbrace{(1,2-2x)^2}_{\text{égalité remarquable}}\\ &= x(1,44-4,8x+4x^2)\\ &= 1,44x-4,8x^2+4x^3\\ &= 4x^3-4,8x^2+1,44x\end{aligned}$$

La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x de $[0\ ;\ 0,6]$, $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 4,8 \times 2x + 1,44 = 12x^2 - 9,6x + 1,44$.

On reconnaît un polynôme du second degré avec $a = 12$, $b = -9,6$ et $c = 1,44$.
$\Delta = b^2 - 4ac = (-9,6)^2 - 4 \times 12 \times 1,44 = 23,04$.

Conseil

Avec un petit programme, c'est tellement plus rapide pour calculer Δ.

Le polynôme a donc deux racines :

Remarque

Votre calculatrice est votre amie...

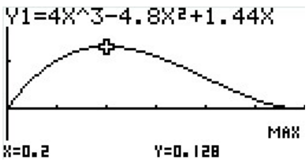
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9,6)+\sqrt{23,04}}{2 \times 12} = 0,6$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-9,6)-\sqrt{23,04}}{2 \times 12} = 0,2$$

Le polynôme est du signe de a partout sauf entre ses racines.
Ainsi :

x	0		0,2		0,6
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	0,128	↘	0

Remarques

Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau et pour déterminer le maximum de f.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = 0$, $X_{Max} = 0,6$, $X_{Scale} = 0,1$ $Y_{Min} = -0,1$, $Y_{Max} = 0,2$ et $Y_{Scale} = 0,1$.

Ainsi, la fonction f admet un maximum atteint en $x = 0,2$. Ce maximum vaut 0,128.

La boîte a un volume maximal lorsque $x = 0,2$ m. Son volume est alors $0,128$ m^3.