MATHEMATIQUES
Applications de la dérivation : sujet d'entraînement 2

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 6$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. a. Calculer la valeur exacte de $f(1)$ (on fera apparaître le détail du calcul).

b. Calculer $f'(x)$.

c. Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. a. Encadrer au mieux $f(x)$ pour $x \in [1\ ;\ 3]$.

b. Encadrer au mieux $f(x)$ pour $x \in [0\ ;\ 2]$.

3. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 1.

4. Existe-t-il un ou des points en lesquels $\mathscr{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?

5. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -2x^2 + 6$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère.
Avec un logiciel de calcul formel on a obtenu l'écran suivant :

```
1 f(x):=-1/3*x^3-2x^2+5x+6
2 g(x):=-2x^2+6
3 solve(f(x)=g(x))
                    [-(√15), 0, √15]
```

a. Retrouver par un calcul approprié l'information donnée par la ligne 3 de l'écran logiciel.

b. Interpréter graphiquement cette information.

Exercice 2

f et g sont les fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par :

$$f(x) = x^2 \qquad \text{et} \qquad g(x) = x^3$$

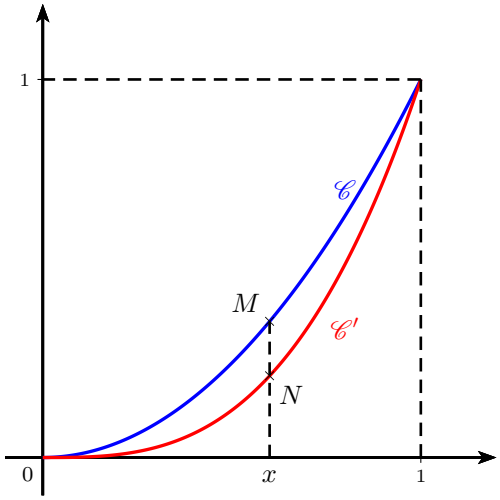
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont les courbes représentatives respectives de f et g.
A tout nombre réel x de $[0\ ;\ 1]$, on associe les points M et N d'abscisse x respectivement situés sur $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

1. Exprimer la distance MN en fonction de x.

2. Etudier les variations de la fonction h définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :

$$h(x) = x^2(1-x)$$

3. En déduire la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale. Donner l'arrondi au centième de cette distance maximale.



Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 12x + 22}{x^2 + 4}$$

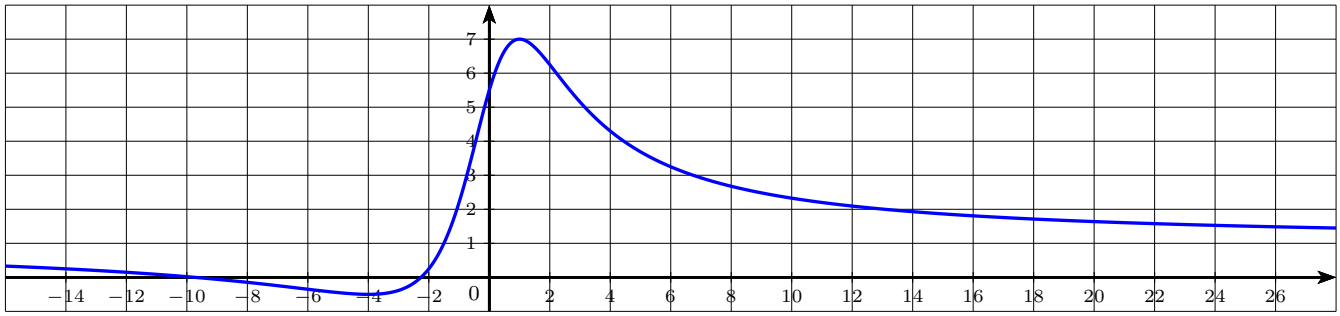
On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. a. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x) = \dfrac{-12(x^2 + 3x - 4)}{(x^2 + 4)^2}$.

b. Dresser le tableau de variations de f.

2. Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et de la droite D d'équation $y = 1$.

3. Dans le repère ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathscr{C}_f$.
Tracer la droite D.



4. On lance l'algorithme suivant :

```
def f(x):
    y=(x**2+12*x+22)/(x**2+4)
    return y


x=1
while f(x)-1>0.5:
    x=x+1
print(x)
```

a. Quel affichage obtient-on ?

b. Interpréter cette valeur.