MATHEMATIQUES
Applications de la dérivation : sujet d'entraînement 2 (corrigé)

Exercice 1

1. a. Calcul de $f(1)$.

$$\begin{aligned} f(1) &= -\frac{1}{3}\times 1^3 - 2\times 1^2 + 5\times 1 + 6 \\ &= -\frac{1}{3} + 9 \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{27}{3} \\ &= \frac{26}{3} \end{aligned}$$

b. f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{3}\times 3x^2 - 2\times 2x + 5 = -x^2 - 4x + 5$.

c. f' est une fonction polynôme du second degré avec $a=-1$, $b=-4$ et $c=5$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4\times(-1)\times 5 = 36$.

Conseil

Avec un petit programme, c'est tellement plus rapide pour calculer Δ (sans se tromper !)

Le polynôme a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+\sqrt{36}}{2\times(-1)} = -5$$
$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-\sqrt{36}}{2\times(-1)} = 1$$

Remarque

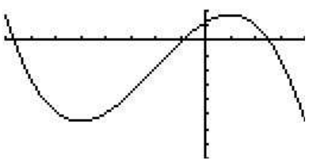
Votre calculatrice est encore une fois votre amie...

Le polynôme est du signe de a partout sauf entre ses racines (attention $a<0$).
Ainsi :

x	$-\infty$		-5	0	1	2		3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0		$-$		
$f(x)$		↘	$\simeq -27{,}33$	6 ↗	$\frac{26}{3}$	$\frac{16}{3}$	↘	-6	↘

Remarques

Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau. La valeur de $f(1)$ a été calculée précédemment.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -8$, $X_{Max} = 4$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -40$, $Y_{Max} = 10$ et $Y_{Scale} = 5$.
Il faut s'y reprendre à plusieurs fois pour obtenir une fenêtre graphique acceptable.

2. En utilisant le tableau de variations précédent, on obtient les encadrements suivants :

a. Si $x \in [1\ ;\ 3]$, $f(x) \in \left[-6\ ;\ \dfrac{26}{3}\right]$.

> **Attention**
> Attention à l'ordre des valeurs dans l'intervalle. La fonction est décroissante sur $[1\ ;\ 3]$, donc les images sont dans l'ordre inverse.

b. Si $x \in [0\ ;\ 2]$, $f(x) \in \left[\dfrac{16}{3}\ ;\ \dfrac{26}{3}\right]$.

> **Explication**
> On prend le maximum et le minimum de f sur $[0\ ;\ 2]$.

3. Au point d'abscisse 1, la tangente est horizontale (voir le tableau de variations).
Ainsi une équation de cette tangente est $y = \dfrac{26}{3}$.

> **Inutile**
> Ce n'est pas la peine de partir dans des calculs longs et inutiles, puisque la tangente en ce point est particulière.

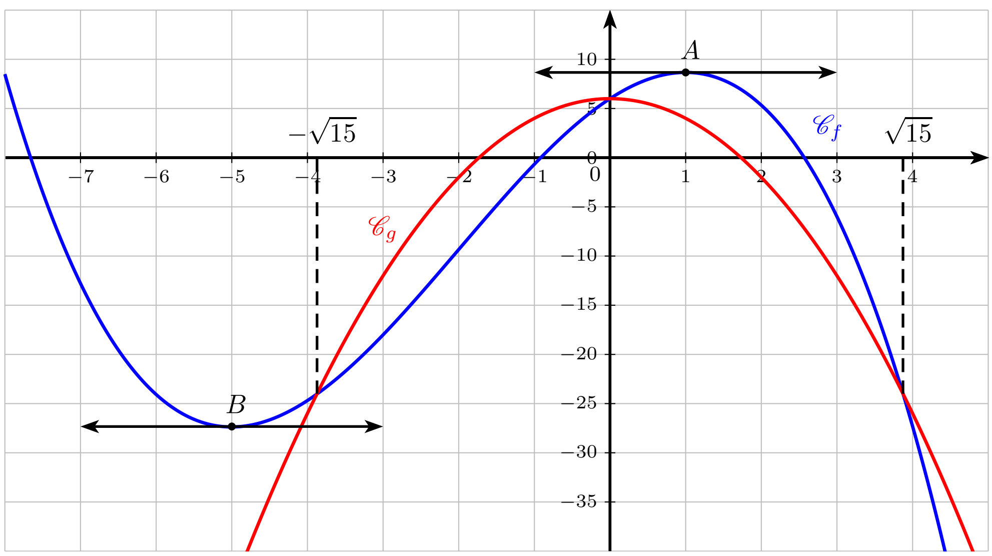
4. Outre le point A en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses, il en existe un autre : le point B d'abscisse -5.

5. Sur la ligne 3 on demande la résolution de l'équation $f(x) = g(x)$: ces solutions sont $-\sqrt{15}$, 0 et $\sqrt{15}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
-\frac{1}{3}x^3 \cancel{-2x^2} + 5x + \cancel{6} &= \cancel{-2x^2} + \cancel{6} \\
-\frac{1}{3}x^3 + 5x &= 0 \\
x\left(-\frac{1}{3}x^2 + 5\right) &= 0 \qquad \text{On factorise par le facteur commun} x. \\
x = 0 \quad \text{ou} \quad & -\frac{1}{3}x^2 + 5 = 0 \\
x = 0 \quad \text{ou} \quad & -\frac{1}{3}x^2 = -5 \qquad \text{On multiplie par } -3 \text{ chaque membre.} \\
x = 0 \quad \text{ou} \quad & x^2 = 15 \qquad \text{Cette équation a deux solutions car } 15 > 0. \\
x = 0 \quad \text{ou} \quad & x = \sqrt{15} \text{ ou } x = -\sqrt{15}
\end{aligned}$$

Cela confirme bien le résultat obtenu avec le logiciel de calcul formel.

6. Les solutions de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Le "petit" graphique ci-dessous pour comprendre :



Exercice 2

1. La distance MN est donnée par : $y_M - y_N = x^2 - x^3$.

2. La fonction h est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $[0~;~1]$.
Pour tout réel x de $[0~;~1]$, $h(x) = x^2 - x^3$.
Et donc, $h'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$.

Soyez attentif

La fonction h n'est autre que la distance MN.

$$\begin{aligned} 2-3x &= 0 \\ -3x &= -2 \\ x &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

x	0		$\frac{2}{3}$		1
x	0	$+$		$+$	
$(2-3x)$		$+$	0	$-$	
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	

Pratique

Ecrivez la fonction h sous forme factorisée afin d'en étudier son signe. On pouvait aussi étudier directement le signe du trinôme $2x - 3x^2$. Mais c'est plus long...

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{27} \end{aligned}$$

3. On en déduit que la distance MN est maximale lorsque $x = \dfrac{2}{3}$. Cette distance maximale vaut alors $\dfrac{4}{27} \simeq 0,15$.

Exercice 3

1. a. Calcul de $f'(x)$.

f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas pas sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ car l'équation $x^2 + 4 = 0$ n'a pas de solution réelles.

Pour dériver f, on utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x^2 + 12x + 22$ et $v(x) = x^2 + 4$.
Pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

Remarque

$u'(x) = 2x + 12$ et $v'(x) = 2x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\overbrace{(2x+12)}^{u'(x)} \times \overbrace{(x^2+4)}^{v(x)} - \overbrace{(x^2+12x+22)}^{u(x)} \times \overbrace{2x}^{v'(x)}}{\underbrace{(x^2+4)^2}_{(v(x))^2}} \\ &= \frac{(2x+12)(x^2+4) - 2x(x^2+12x+22)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{(2x^3+8x+12x^2+48) - (2x^3+24x^2+44x)}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{\cancel{2x^3} + 8x + 12x^2 + 48 - \cancel{2x^3} - 24x^2 - 44x}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{-12x^2 - 36x + 48}{(x^2+4)^2} \\ &= \frac{-12(x^2+3x-4)}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

b. $x^2 + 12x + 22$ est un polynôme du second degré avec $a = 1$, $b = 3$ et $c = -4$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 25$.

Le polynôme a donc deux racines :

$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 1$
$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -4$
Le polynôme est du signe de a partout sauf entre ses racines.
Ainsi :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
-12		$-$		$-$		$-$	
$x^2 + 3x - 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$(x^2 + 4)^2$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	7	$\searrow$	

Remarque
Vérifiez la cohérence de votre tableau avec la courbe donnée dans l'énoncé.

2. Pour étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ avec la droite d'équation $y = 1$, on étudie le signe de la différence $f(x) - 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) - 1 &= \frac{x^2 + 12x + 22}{x^2 + 4} - 1 \\
&= \frac{x^2 + 12x + 22}{x^2 + 4} - \frac{x^2 + 4}{x^2 + 4} \\
&= \frac{(x^2 + 12x + 22) - (x^2 + 4)}{x^2 + 4} \\
&= \frac{\cancel{x^2} + 12x + 22 - \cancel{x^2} - 4}{x^2 + 4} \\
&= \frac{12x + 18}{x^2 + 4}
\end{aligned}$$

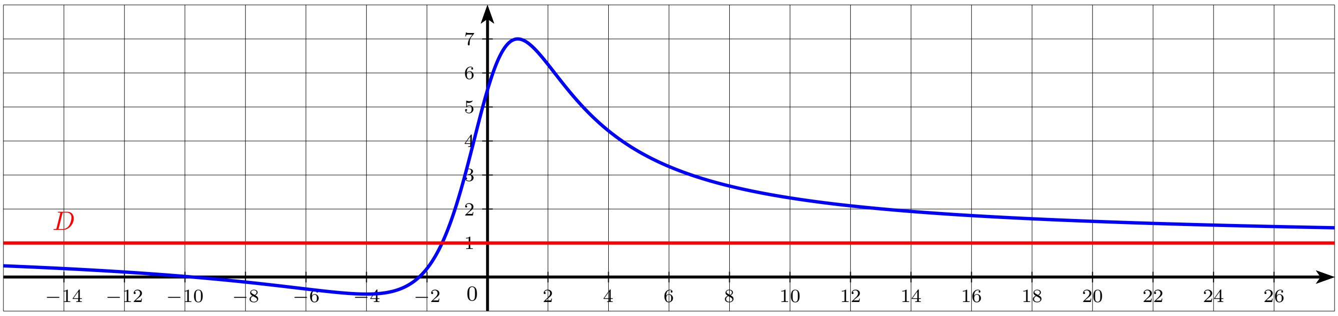
$12x + 18$ s'annule en $x = -\dfrac{18}{12} = -1,5$.

On obtient alors le tableau de signes de $\dfrac{12x + 18}{x^2 + 4}$:

x	$-\infty$		$-1{,}5$		$+\infty$
$12x + 18$		$-$	0	$+$	
$x^2 + 4$		$+$		$+$	
$f(x) - 1$		$-$	0	$+$	
Position		$\mathscr{C}_f \prec D$		$\mathscr{C}_f \succ D$	

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de la droite D sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ et en dessous sur $]-\infty\ ;\ 1,5[$.

3. Tracé de la droite D :



4. L'algorithme calcule $f(x)-1$ tant que $f(x)-1>0,5$. Il calcule donc d'abord $f(1)-1$, puis $f(2)-1$, puis $f(3)-1$, etc....
Le tableau ci-dessous donne les valeurs de $f(x)-1$ pour $x=1$, $x=2$, $x=3$ et $x=4$.
On voit que ces valeurs sont plus grande que 0,5.

X	Y1
1	6
2	5.25
3	4.1538
4	3.3

L'algorithme continue jusqu'à ce que $f(x)-1 \leqslant 1$. Cela intervient lorsque $x=26$.
Cela signifie que $f(26)-1 \leqslant 0,5$ mais que $f(25)-1>0,5$, ce qui est confirmé par le tableau :

X	Y1
24	0.5275
25	0.5055
26	0.4852
27	0.4665

Par conséquent, 26 est la plus petite valeur entière positive telle que $f(x)-1 \leqslant 0,5$, c'est-à-dire l'écart entre $\mathscr{C}_f$ et D est inférieur ou égal à 0,5.

Remarque

Cette droite D est particulière pour la courbe . En fait, plus x augmente plus $\mathscr{C}_f$ se rapproche de cette droite.... l'écart entre les deux devient de plus en plus petit (il se rapproche de 0). On dit que la droite D est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$. Elle l'est aussi en $-\infty$ d'ailleurs.