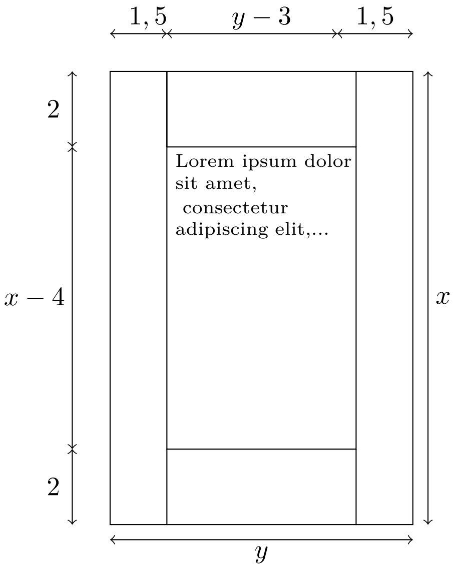
MATHEMATIQUES
Applications de la dérivation : sujet entraînement 3 (Corrigé)

Exercice 1

1. On utilise le découpage suivant :



$$\underbrace{(y-3)}_{\substack{\text{Largeur}\\ \text{du}\\ \text{rectangle.}}} \times \underbrace{(x-4)}_{\substack{\text{Longueur}\\ \text{du}\\ \text{rectangle}}} = 300$$

$$\begin{aligned}
(y-3)(x-4) &= 300\\
xy-4y-3x+12 &= 300\\
y(x-4) &= 300+3x-12\\
y(x-4) &= 288+3x\\
y &= \frac{288+3x}{x-4}
\end{aligned}$$

Autrement

$$\underbrace{xy}_{\substack{\text{Aire}\\ \text{totale}}} \underbrace{-2\times(1,5\times x)}_{\substack{\text{Aire}\\ \text{des deux}\\ \text{rectangles}\\ \text{à droite et gauche.}}} \underbrace{-2\times(2\times(y-3))}_{\substack{\text{Aire}\\ \text{des deux}\\ \text{rectangles}\\ \text{haut et bas.}}} = 300$$

$$\begin{aligned}
xy-2\times(1,5\times x)-2\times(2(y-3)) &= 300\\
xy-3x-4(y-3) &= 300\\
xy-3x-4y+12 &= 300\\
xy-4y &= 300-12+3x\\
y(x-4) &= 288+3x\\
y &= \frac{288+3x}{x-4}
\end{aligned}$$

2. $S(x) = x\times y = x\times\dfrac{288+3x}{x-4} = \dfrac{288x+3x^2}{x-4}$.
Comme x et y sont des nombres strictement positifs, on en déduit que x est strictement supérieur à 4.

Attention
Si $x \in]0\ ;\ 4[$, y serait négatif car $x-4$ le serait (négatif).

$\mathcal{S}$ est un quotient de deux fonctions dérivables sur $]4\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]4\ ;\ +\infty[$, ainsi, $\mathcal{S}$ est dérivable sur $]4\ ;\ +\infty[$.
On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 288x+3x^2$ et $v(x) = x-4$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}'(x) &= \frac{\overbrace{(288+6x)}^{u'(x)}\times\overbrace{(x-4)}^{v(x)}-\overbrace{(288x+3x^2)}^{u(x)}\times\overbrace{1}^{v'(x)}}{\underbrace{(x-4)^2}_{(v(x))^2}}\\
&= \frac{288x-1152+6x^2-24x-288x-3x^2}{(x-4)^2}\\
&= \frac{3x^2-24x-1152}{(x-4)^2}
\end{aligned}$$

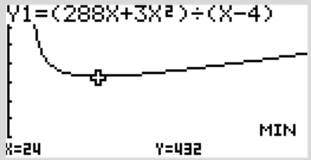
$3x^2 - 24x - 1152$ est un trinôme du second degré.

$\Delta = 14400$. Les racines sont $x_1 = 24$ et $x_2 = -16$.
Le trinôme est du signe de $a = 3$ sauf entre ses racines. On en déduit le tableau de variations :

x	4		24		$+\infty$
$3x^2 - 24x - 1152$		$-$	0	$+$	
$(x-4)^2$		$+$		$+$	
$\mathcal{S}'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$\mathcal{S}(x)$	||	$\searrow$	432	$\nearrow$	

Réflexe : calculatrice

Avec $X_{\text{Min}} = 0$, $X_{\text{Max}} = 50$,
XScale $= 10$, $Y_{\text{Min}} = 0$, $Y_{\text{Max}} = 800$,
YScale $= 100$.



3. D'après ce tableau de variations, la longueur de la page pour que la consommation de papier soit minimale est $x = 24$ cm.

On en déduit la largeur de la page en calculant la valeur de y correspondante : $y = \dfrac{288 + 3 \times 24}{24 - 4} = 18$.

Exercice 2

1. D'après le théorème de Pythagore, on a $\ell^2 = R^2 - h^2 = 20^2 - R^2 = 400 - h^2$.
L'aire de base vaut $\mathscr{A} = \pi \ell^2 = \pi\left(400 - h^2\right)$.

Le volume du cône est alors :

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(400 - h^2\right)h$$

2. La fonction V est définie sur $[0\ ;\ 20]$ et dérivable.
$V(h) = \dfrac{\pi}{3} \times \left(400h - h^3\right)$ donc :

$$V'(h) = \frac{\pi}{3} \times \left(400 - 3h^2\right)$$

$V'(h)$ a pour racines $h_1 = -\sqrt{\dfrac{400}{3}} = -\dfrac{20}{\sqrt{3}} = -\dfrac{20\sqrt{3}}{3} \notin [0\ ;\ 20]$ et $h_2 = \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \in [0\ ;\ 20]$.
$V'(h)$ est un polynôme du second degré qui est du signe du coefficient de h^2 à l'extérieur des racines, donc négatif.
La fonction est donc croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right]$ puis décroissante sur $\left[\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\ ;\ 20\right]$.
Tableau de variation :

h	0		$\frac{20\sqrt{3}}{3}$		20
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(h)$	0	$\nearrow$	$V\left(\frac{20\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	0

Le volume maximum est $V\left(\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{\pi}{3}\left(400 - \dfrac{400}{3}\right) \times \dfrac{20\sqrt{3}}{3} = \dfrac{16\,000\pi\sqrt{3}}{27} \approx 3\,224 \text{ cm}^3$.

3. On a vu précédemment que le rayon du cercle de base était $\ell = \sqrt{400 - h^2}$.

Le volume est maximum pour $h = h_2 = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$; la valeur correspondante de ℓ est
$\ell_2 = \sqrt{400 - h_2^2} = \sqrt{400 - \dfrac{400}{3}} = \sqrt{\dfrac{800}{3}} = \sqrt{\dfrac{2 \times 400}{3}} = \dfrac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{20\sqrt{6}}{3}$.

Le périmètre du cercle de base est alors $p_2 = 2\pi\ell_2 = 40\pi\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

La longueur du cercle de base est aussi la longueur de l'arc de cercle du carton restant après avoir ôté le secteur circulaire d'angle au centre α :

$$p_2 = 2\pi R - R\alpha = R\,(2\pi - \alpha)$$

Par conséquent : $20(2\pi - \alpha) = 40\pi\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ d'où $2\pi - \alpha = 2\pi\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ qui donne :

$\alpha = 2\pi - 2\pi\dfrac{\sqrt{6}}{3} = 2\pi\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$ soit $\alpha = 2\pi\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$. (en radians)

En degrés : $\alpha = 2\pi\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right) \times \dfrac{180}{\pi} = 120\left(3-\sqrt{6}\right) \approx 66,06\ ^\circ$

Pour aller plus loin

On peut montrer que l'angle α ne dépend pas du rayon R du disque en carton. En effet :
Si on reprend les calculs précédents avec R quelconque.
On a (avec les mêmes notations) :

- $V(h) = \dfrac{\pi}{3}\left(R^2h - h^3\right)$
- $V'(h) = \dfrac{\pi}{3}\left(R^2 - 3h^2\right)$
- $h_1 = -\dfrac{R\sqrt{3}}{3} \notin [0\ ;\ R]$ et $h_2 = \dfrac{R\sqrt{3}}{3} \in [0\ ;\ R]$
- Les variations sont les mêmes que dans le cas particulier $R = 20$.
- Le maximum est atteint pour $h_2 = \dfrac{R\sqrt{3}}{3}$
- Le rayon correspondant du cercle de base est $\ell_2 = \sqrt{R^2 - h_2^2} = \sqrt{R^2 - \dfrac{R^2}{3}} = \sqrt{\dfrac{2R^2}{3}} = \boxed{R\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$
- Le périmètre du cercle de base vaut alors $p_2 = 2\pi\ell_2 = \boxed{2\pi R\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$.
- On a alors : $R(2\pi - \alpha) = 2\pi R\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ d'où $\alpha = 2\pi\left(1 - \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right) = \boxed{2\pi\left(\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)}$ qui est la même valeur que précédemment.
  La valeur de α **ne dépend pas** de R.