MATHEMATIQUES
Applications de la dérivation : entraînement savoir-faire (Corrigé)

Exercice 1

1. Le signe de $f'(x)$ permet d'obtenir les variations de la fonction f :

x	0		2		4		7
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↗	$f(2)$	↘	$f(4)$	↗	$f(7)$

2. Grâce à la représentation graphique de f', on peut en déduire son signe, ce qui permet ensuite d'obtenir les variations de f :

x	-3		-2		1		3		4
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(-3)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(1)$	↘	$f(3)$	↗	$f(4)$

Attention

Faites toujours attention à la courbe que l'on vous donne. S'agit-il de celle de la fonction f ? de le fonction f' ?

Exercice 2

1. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynôme du troisième degré).
On calcule d'abord la fonction dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$
Il s'agit d'une fonction polynôme du second degré (elle est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = -6$ et $c = -9$.
Pour déterminer son signe, on calcule Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-9) = 144.$

Le polynôme a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) + \sqrt{144}}{2 \times 3} = \frac{6 + 12}{6} = 3$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) - \sqrt{144}}{2 \times 3} = \frac{6 - 12}{6} = -1$$

Rappel

Vous devez reconnaître les fonctions polynômes du second degré.

Remarques

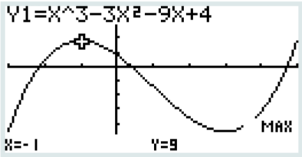
• Vous devez connaître la règle des signes pour les polynômes du second degré.
• Votre calculatrice peut vous aider à vérifier ces résultats.

Le polynôme est du signe de a partout sauf entre ses racines.
Ainsi :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	9	↘	-23	↗	

Remarques

Utilisez votre calculatrice pour "vérifier" le tableau et pour déterminer les valeurs remarquables $f(-1)$ et $f(3)$.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -3$, $X_{Max} = 5$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 3$ et $Y_{Scale} = 1$.

Avec le solveur graphique Gsolv G-Solv F5, puis Y-CAL on obtient les valeurs remarquables.

2. g est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ car g est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]-2\ ;\ +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

Pour les pressés

On peut justifier la dérivabilité de cette fonction en écrivant qu'il s'agit d'une fonction rationnelle qui est donc dérivable sur son ensemble de définition.

On utilise la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = 4x + 8$.

Remarque

$u'(x) = 3$ et $v'(x) = 4$.

Pour tout réel x de $]-2\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{\overbrace{3}^{u'(x)} \times \overbrace{(4x+8)}^{v(x)} - \overbrace{(3x-2)}^{u(x)} \times \overbrace{4}^{v'(x)}}{\underbrace{(4x+8)^2}_{(v(x))^2}} \\
&= \frac{(12x+24) - (12x-8)}{(4x+8)^2} \\
&= \frac{12x + 24 - 12x + 8}{(4x+8)^2} \\
&= \frac{32}{(4x+8)^2}
\end{aligned}$$

On en déduit que pour tout réel x de $]-2\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$.

Evident

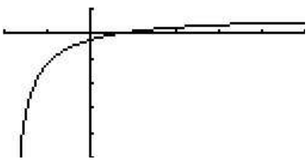
Eh bien... dans un quotient si le numérateur est positif et le dénominateur aussi, alors le quotient est positif.

On en déduit le tableau de variations de g :

x	-2	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$
$g(x)$	‖	↗

Double barre

La fonction n'est pas définie en -2. On l'indique dans le tableau de variations avec une double barre.



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -2$, $X_{Max} = 5$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 1$ et $Y_{Scale} = 1$.

3. f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$, comme somme de fonctions dérivables sur ces intervalles.
En posant $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = \dfrac{1}{x}$, on a $f(x) = u(x) + v(x)$.

- $u'(x) = 2$.
- $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi, pour tout réel x de $\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{2}_{u'(x)} + \underbrace{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}_{v'(x)} \\ &= \frac{2x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2} \qquad \text{Mise au même dénominateur.} \\ &= \frac{2x^2-1}{x^2} \end{aligned}$$

Le numérateur $2x^2 - 1$ est un polynôme du second degré.

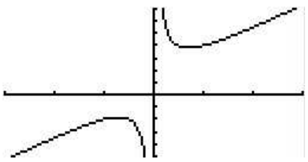
$$\begin{aligned} 2x^2 - 1 &= 0 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= 0,5 \\ x = -\sqrt{0,5} \quad &\text{ou} \quad x = \sqrt{0,5} \end{aligned}$$

Pas la peine

Inutile de calculer Δ ici. Après si ça peut vous rassurer....

Le trinôme est du signe de $a = 2$ sauf entre ses racines.

x	$-\infty$		$-\sqrt{0,5}$		0		$\sqrt{0,5}$		$+\infty$
$2x^2-1$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	$\|\|$	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\simeq -1,83$	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	$\simeq 3,83$	$\nearrow$	



Calculatrice

On obtient cette représentation avec $X_{Min} = -3$, $X_{Max} = 3$, $X_{Scale} = 1$ $Y_{Min} = -5$, $Y_{Max} = 7$ et $Y_{Scale} = 1$.

Avec le solveur graphique Gsolv G-Solv F5, puis MIN et MAX on obtient les valeurs remarquables.

Exercice 3

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2 \times 3x^2 - 9 \times x - 24 = 6x^2 - 9x - 24$.
$f'(x)$ est un polynôme du second degré.
Son discriminant Δ est égal à $(-18)^2 - 4 \times 6 \times (-24) = 900$.
$\Delta > 0$, donc le polynôme $f'(x)$ a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-18) - \sqrt{900}}{2 \times 6} = \frac{18 - 30}{12} = -1$$
$$x_2 = \frac{-(-18) + \sqrt{900}}{2 \times 6} = \frac{18 + 30}{12} = 4$$

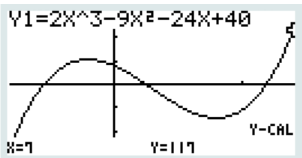
Calculatrice

Utilisez votre calculatrice pour vérifier vos résultats : Dans le menu EQUA, puis F2 F2:Polynomial, sélectionnez le degré (ici 2) Degree? 2 3 puis indiquez les coefficients : a 6 b -18 c -24. La calculatrice affiche alors les deux racines : 4 -1

Le polynôme est du signe de $a = 6$ (donc positif) sauf entre ses racines.
On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	-2	-1	3	4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	36 ↗	53 ↘	-59 ↘	-72	↗	

2. En utilisant la calculatrice :



Calculatrice

Pour paramétrer la fenêtre d'affichage, on utilise V-Window F3. Pour cette représentation : $X_{Min} = -4$, $X_{Max} = 7$, $X_{Scale} = 5$ $Y_{Min} = -150$, $Y_{Max} = 1500$ et $Y_{Scale} = 50$ (utiliser le tableau de variation pour mettre des valeurs cohérentes).

Avec le solveur graphique Gsolv G-Solv F5, puis avec MIN et MAX on obtient les extremums. Avec Y-CAL, on obtient les images de -2 et de 3.

3. D'après le tableau de variations f admet un minimum local qui vaut -72 atteint en $x = 4$ et un maximum local atteint en $x = -1$ qui vaut 53.

4. Toujours d'après le tableau de variations précédent, lorsque $x \in [-2\ ;\ 3]$, $f(x) \in [-59\ ;\ 53]$.

Le truc

On prend le minimum et le maximum de f sur $[-2\ ;\ 3]$.