MATHEMATIQUES
Fonction exponentielle : entraînement 1

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $I = [-2\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)\mathrm{e}^{-x}$$

1. Montrer que pour tout réel $x \in I$ on a $f(x) \geqslant 0$.

2. a. Montrer que la dérivée de f est définie par $f'(x) = (-x^2 + 1)\mathrm{e}^{-x}$.

b. Après avoir étudié les variations de f sur I, dresser son tableau de variations.

3. Représenter graphiquement la fonction f sur I à l'aide de votre calculatrice.

Exercice 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{4(-x+1)}{\mathrm{e}^x}$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ (on écrira la valeur exacte de l'extremum dans le tableau).

2. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$.

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 3

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail.
La production minimale est de 10 tonnes et la production maximale est de 250 tonnes.

On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de q dizaines de tonnes d'aliments.
On admet que ce bénéfice est modélisé par la fonction B définie par :

$$B(q) = 10 - \frac{\mathrm{e}^{0,2q+1}}{q}$$

1. a. Sur quel intervalle I est définie la fonction B ?

b. Calculer à la centaine d'euros près le bénéfice obtenu pour 50 tonnes d'aliments produits et vendus.

2. a. Démontrer que, pour tout réel $q \in I$, $B'(q) = \dfrac{(1-0,2q)\mathrm{e}^{0,2q+1}}{q^2}$.

b. Etudier le signe de $B'(q)$ sur I, puis en déduire le tableau de variations de la fonction B sur I.

3. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société ?
Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu ?

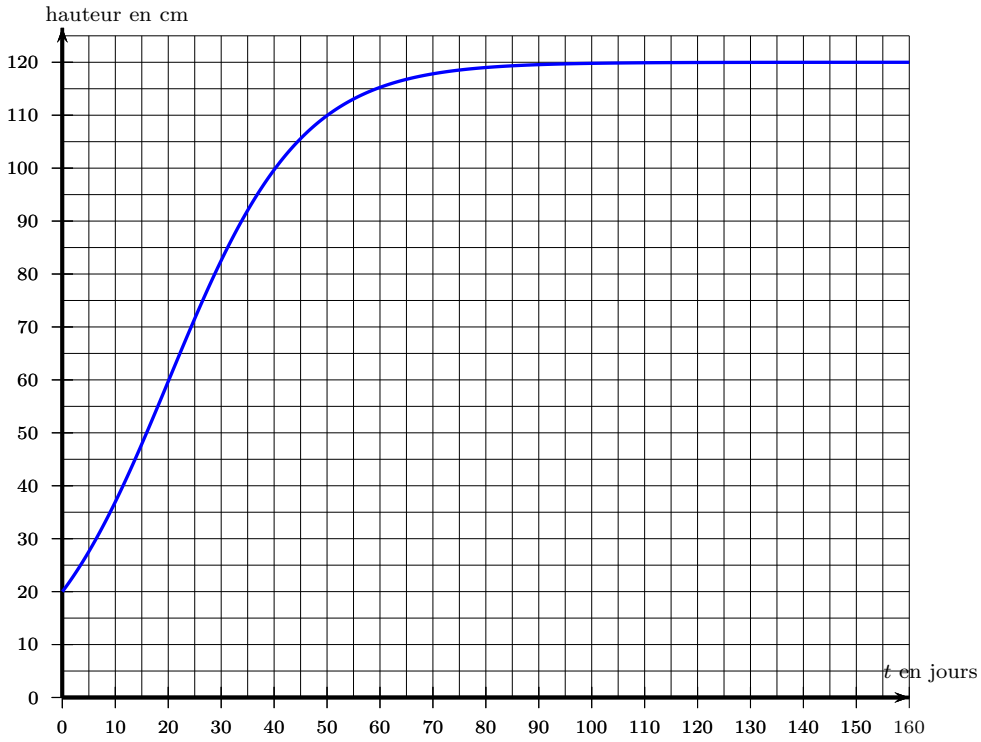
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Exercice 4

Des scientifiques étudient la croissance de plants de tomates d'une variété donnée après plantation. Ils ont établi que la hauteur des plants en centimètres peut être modélisée en fonction du temps par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(t) = \frac{120}{5\mathrm{e}^{-0,08t} + 1}$$

où t est le temps en jours après le jour de plantation. On donne la représentation graphique de la fonction f :



PARTIE A : ÉTUDE DE LA FONCTION f

1. Calculer la hauteur des plants le jour où ils sont plantés.

2. Justifier que pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[$, $f(t) < 120$. Que peut-on en déduire ?

3. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(t) = \dfrac{48\mathrm{e}^{-0,08t}}{(5\mathrm{e}^{-0,08t} + 1)^2}$.

4. Étudier le signe de f' sur $[0\ ;\ +\infty[$, puis en déduire le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

PARTIE B : EXPLOITATION

1. Donner une inéquation permettant de déterminer au bout de combien de jours le plant mesurera plus de 60 cm de haut.

2. Résoudre cette inéquation en utilisant la courbe représentative de f.

3. **a.** Montrer que résoudre cette inéquation revient à résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{0,08t} > 5$.

b. En utilisant la calculatrice, donner la plus petite valeur de t arrondi au centième solution de cette inéquation.

PARTIE C : ALGORITHME

```
t = 0
f = 20
while f < 60
    t = t + 1
    f = 120/(5 * exp(-0,08t) + 1)
```

1. L'entrée dans la boucle **while** de cet algorithme dépend d'une condition. Quelle est cette condition ? Quand sortira-t-on de cette boucle ?

2. Quelles seront les trois premières valeurs de la variable t ? Donner les valeurs correspondantes de la variable f. (*Les résultats seront arrondis à l'unité.*)

3. Quelle sera la valeur de de la variable t à la fin de l'algorithme ? Que représente concrètement cette valeur ?